Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

О явном виде фундаментального решения параболиеского оператора

Чечкин Алексей Григорьевич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальных уравнений, Москва, Россия

E-mail: a.g.chechkin@gmail.com

Предположим, что выполнены следующие гипотезы для оператора

$$\mathfrak{L}[v] := \frac{1}{2}\sum_{ij}^{n} A_{ij}(t)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i}^{n}\left(\sum_{j}^{n} B_{ij}(t)x_j + c_i(t)\right)\frac{\partial v}{\partial x_i} + + \left(\sum_{ij}^{n} F_{ij}(t)x_i x_j + \sum_{i}^{n} g_i(t)x_i + h(t)\right)v :$$

А. *Коэффициенты* $A(t)$, $B(t)$, $F(t)$: $\mathbf{R}_+ \to \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbf{R})$ — *непрерывные на* $\mathbf{R}_+$ *функции, имеющие при* $t \to 0$ *конечные пределы* A_0, B_0, $F_0 \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbf{R})$ *соответственно,* $A(t)$ — *симметричная,* A_0 — *положительно определенная.*

Б. *Существует* $\int_0^t \frac{\tilde{q}(s)}{s} ds < +\infty$ *при* $0 \le t < \varepsilon$,

где $\tilde{q} = \frac{1}{n}\mathrm{tr}(Q + (A - A_0)A_0^{-1}[E + Q])$, $Q = [E - \frac{1}{2t}RA_0^{-1}]^{-1} - E$, $R(t)$ — заданная матрица на $[0, \varepsilon]$. Рассмотрим системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} S' = 2SAS + SB + B^T S + \frac{1}{2}(F + F^T), \\ q' = (2SA + B^T)q + 2Sc + g, \\ r' = \mathrm{tr}(AS) + \frac{1}{2}q^T A q + q^T c + h, \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} P' = -P\left(2SA + B^T\right) - (2AS + B)\,P - 2A, \\ m' = -(2AS + B)m - Aq - c, \\ C' = C \cdot (\mathrm{tr}\,(AP^{-1})) \end{cases} \tag{2}$$

и задачу Коши $\frac{\partial u}{\partial t} = \mathfrak{L}[u]$, $\quad u|_{t=0} = \delta_y(x)$, где $\delta_y(x)$ — дельта-функция с особенностью в точке $y \in \mathbf{R}^n$.

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения* **А** *и* **Б**. *Тогда*

$$u(t, x) = e^{\{x^T S(t)x + q^T(t)x + r(t)\}} C(t) e^{\{(P^{-1}(t)(x - m(t;y)),(x - m(t;y)))\}},$$

где $S(t)$, $q(t)$ *и* $r(t)$ *суть решения системы уравнений* (1) *с начальными условиями* $S_{ij}(0) = q_k(0) = r(0) = 0$ *для* $\forall i, j, k \in \overline{1, n}$, $P(t)$, $m(t; y)$ *суть решения двух первых уравнений системы* (2) *с начальными условиями* $P_{ij}(0) = 0$ *для* $\forall i, j \in \overline{1, n}$, $m(0) = y$, *а* $C(t)$ *есть частное решенце третьего уравнения системы* (2) *вида*

$$C(t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi t)^n \det A_0}} \exp\left\{ -\frac{n}{2}\int_0^t \frac{\tilde{q}(s)}{s} ds \right\}.$$