Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Операционный метод решения задач физики на колебательные процессы

Боброва Ирина Александровна

Студент (бакалавр)

Московский государственный областной университет, Москва, Россия

E-mail: ia.bobrova94@gmail.com

Теория гироскопов была широко описана А.Н. Крыловым и Ю.А. Крутковым в книге "Общая теория гироскопов технических их применений". Эта теория была развита с целью разработки устройств снижения бортовой качки корабля. Судовой гироскоп противодействует качке судна, когда смещение по фазе не превосходит 90°, т.е. при малых сопротивлениях. Основной проблемой развития теории гироскопов является задача описания движения корабля при бортовой качке.

Постановка задачи

Найти колебания корабля на зыби, если последовательно проходящие волны разнятся по своим периодам и амплитудам.

Отметим, что дифференциальное уравнение, описывающее качку корабля, имеет в правой части возмущающую силу синусоидального типа

$$f(t) = f_0 \sin \omega t \; \risingdotseq f_0 \frac{p\omega}{p^2+\omega^2}.$$

Решение задачи операционным методом

Уравнение колебаний корабля записывается в виде:

$$\varphi'' + 2n\varphi' + k^2\varphi = \sum_{i=1}^{s} f_i(t),$$

где φ – угол отклонения корабля; n– коэффициент, зависящий от k; k^2 – квадрат частоты свободных колебаний корабля

$$\omega_i = \frac{2\pi}{T_i};$$

$f_i(t),\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ s,$ –возмущающий момент.

Определим возмущающий момент. Пусть $T_i,\ i = 1,\ 2,\ \ldots, s,$ – периоды соответствующих волн, a_i, $i = 1,\ 2,\ \ldots, s,$ – соответствующие волновые склоны.

Каждая волна проходит в следующем промежутке времени:

$$T_1 + T_2 + \cdots + T_{i-1} = t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i = T_1 + T_2 + \cdots + T_i.$$

Тогда возмущающий момент, создаваемый $i-$ой волной описывается следующим образом:

$$f_i(t) = k^2 a_i \left[\sigma_0(t-t_{i-1}) \sin\omega_i\ (t-t_{i-1}) - \sigma_0(t-t_i)\sin\omega_i\ (t-t_i)\right].$$

Составим соответствующее операторное уравнение при начальных условиях

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0.$$

$$\Phi(p)\left(p^2 + 2np + k^2\right) = k^2 \sum_{i=1}^{s} F_i(t).$$

Найдем изображение для возмущающего момента.

По теореме запаздывания [2] имеем

$$\sigma_0(t-t_i)\sin\omega_i\ (t-t_i) \risingdotseq e^{-pt_i}\frac{p\omega_i}{p^2+{\omega_i}^2},$$

тогда

$$f_i(t) \risingdotseq k^2 a_i e^{-pt_{i-1}}\left(1-e^{-pT_i}\right)\frac{p\omega_i}{p^2+{\omega_i}^2}.$$

Операторное уравнение разрешим относительно изображения

$$\Phi(p) = k^2\sum_{i=1}^{s}\frac{a_i e^{-pt_{i-1}}\left(1-e^{-pT_i}\right)p\omega_i}{\left(p^2+{\omega_i}^2\right)\left(p^2+2np+k^2\right)}.$$

$$\cdot\frac{a_i e^{-pt_{i-1}}\left(1-e^{-pT_i}\right)p\omega_i}{\left(p^2+{\omega_i}^2\right)\left(p^2+2np+k^2\right)} \fallingdotseq \frac{\lambda_i}{k^2}\left[\sin\left(\omega_i t+\alpha_i\right)\ +\frac{\omega_i}{k_1}e^{-nt}\sin\left(k_1 t+\beta_i\right)\ \right].$$

Напишем теперь операторное уравнение для угла отклонения корабля при $i-$ ой волне:

$$\Phi_{\mathrm{i}}(p) = k^2\frac{a_i e^{-pt_{i-1}}\left(1-e^{-pT_i}\right)p\omega_i}{\left(p^2+{\omega_i}^2\right)\left(p^2+2np+k^2\right)}.$$

Находим оригинал по его изображению:

$$\varphi_i(t) =$$

$$= \begin{cases} 0, \quad t\leqslant t_{i-1}, \\ a_i\lambda_i\left[\sin\left\langle\omega_i\left(t-t_{i-1}\right)+\alpha_i\right\rangle\ +\frac{\omega_i}{k_1}e^{-n(t-t_{i-1})}\sin\left\langle k_1\left(t-t_{i-1}\right)+\beta_i\right\rangle\ \right], \quad t_{i-1}\leqslant t\leqslant t_i, \\ a_i\lambda_i\frac{\omega_i}{k_1}e^{-n(t-t_{i-1})}\left[\sin\left\langle k_1\left(t-t_{i-1}\right)+\beta_i\right\rangle\ -e^{-nT_i}\sin\left\langle k_1\left(t-t_{i-1}\right)+\beta_i\right\rangle\ \right], \quad t\geqslant t_i. \end{cases}$$

Тогда при $t_{s-1}\leqslant t\leqslant t_s$ имеем искомую функцию:

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{s-1}\varphi_i(t)+\varphi_s(t),$$

где

$$\varphi_s(t) = a_s\lambda_s\left[\sin\left\langle\omega_s\left(t-t_{s-1}\right)+\alpha_s\right\rangle\ +\frac{\omega_s}{k_1}e^{-n(t-t_{s-1})}\sin\left\langle k_1\left(t-t_{s-1}\right)+\beta_s\right\rangle\ \right],$$

$$\varphi_i(t) = a_i\lambda_i\frac{\omega_i}{k_1}e^{-n(t-t_{i-1})}\left[\sin\left\langle k_1\left(t-t_{i-1}\right)+\beta_i\right\rangle\ -e^{nT_i}\sin\left\langle k_1\left(t-t_{i-1}\right)+\beta_i\right\rangle\ \right],$$

$$\lambda_i = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{{\omega_i}^2}{k^2}\right)^2+\left(\frac{2n\omega_i}{k}\right)^2}}, \tan\alpha_i\ = -\frac{2n\omega_i}{k^2-{\omega_i}^2}, \tan\beta_i\ = \frac{2nk_1}{2n^2-k^2+{\omega_i}^2}.$$

Анализ графика решения

Используем полученную функцию для построения графика прохождения судном первых трех волн с различными периодами.

Пусть период свободных колебаний корабля равен 12 сек., а периоды прохождения нескольких волн с одинаковыми волновыми склонами, но с разными периодами: $T_1 = 8.2$ сек., $T_2 = 7.7$ сек., $T_3 = 7.5$ сек., $T_4 = 8.5$ сек., $T_5 = 7.7$ сек.

Выводы:

1. Согласно источнику [1] при периодической качке кривая является кривой затухающих колебаний, показывающей характер изменения углов крена в зависимости от времени. На

полученном графике (рис.1) видно, что динамика изменения углов крена не подчиняется закону распределения затухающих колебаний.
2. При $n > 0.5k$ значения, зависящие от n, а именно: λ_i, α_i и β_i, имеют малые различия. Это видно из графика (рис.1): кривые при $n = 0.6k$ и $n = 0.96k$ на большинстве участков t совпадают, так же данный вывод можно заметить при конкретных вычислениях параметров λ_i, α_i и β_i.
3. При n близком к k, т.е. в случае близком к резонансу, кривая сжимается к оси Ot. Это говорит о том, что решение задачи в случае резонанса имеет иной вид, с которым можно ознакомится в источнике [3].

Источники и литература

1) Басин А.М. Гидродинамика судна. Ленинград, 1961.
2) Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. Москва, 1989.
3) Лурье А.И. Операционное исчисление и его приложения к задачам механики. Ленинград, 1951.

Слова благодарности

Считаю своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность доктору физико-математических наук М.К. Кузьмину , который внимательно прочитал всю рукопись и дал ряд ценных комментариев.

Иллюстрации

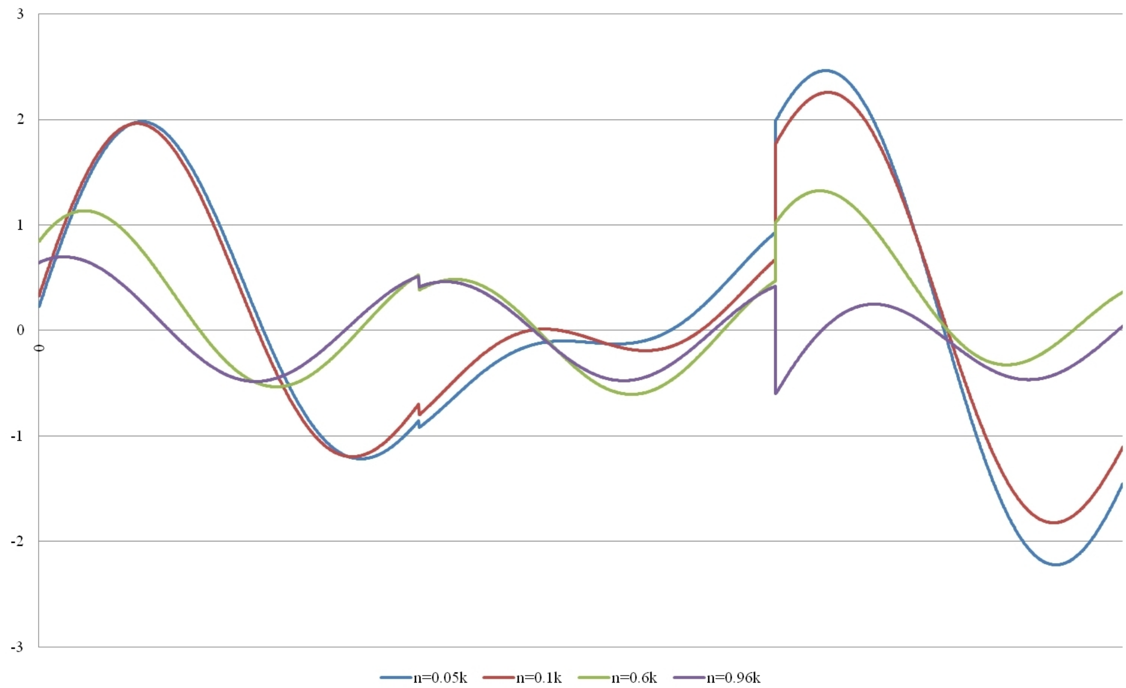

Рис. 1. Прохождение 1-3 волн при различных значениях n