Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Законы сохранения и частные решения одного уравнения в конечных разностях

Хакимова Айгуль Ринатовна
Аспирант
Башкирский государственный университет, Уфа, Россия
E-mail: aigulya.khakimova@mail.ru

Рассматривается система дискретных уравнений вида (см. [1]):

$$\begin{cases} u_{n,m+1} - u_{n+1,m} + u_{n+1,m+1}((u_{n,m+1} - u_{n+1,m})v_{n+1,m} + \varepsilon) = 0, \\ v_{n+1,m} - v_{n,m+1} + v_{n,m}((v_{n+1,m} - v_{n,m+1})u_{n,m+1} + \varepsilon) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где искомые функции $u = u_{n,m}$ и $v = v_{n,m}$ зависят от двух целочисленных переменных n и m, ε - произвольный параметр.

Для системы уравнений (1) построена бесконечная серия законов сохранения и найдено частное решение:

$$\begin{cases} u_{n,m} = \frac{(\eta-\mu)pq}{\eta(\mu^n(\mu+\varepsilon)^m q - \eta^n(\eta+\varepsilon)^m p)}, \\ v_{n,m} = \frac{(\eta-\mu)\eta\eta^n(\eta+\varepsilon)^m\mu^n(\mu+\varepsilon)^m}{pq(\eta\mu^n(\mu+\varepsilon)^m q - \mu\eta^n(\eta+\varepsilon)^m p)}. \end{cases}$$

где p, q, μ, η константы.

Пара Лакса для системы (1) найдена в работе [1]:

$$L = D_n^{-1} f = \begin{pmatrix} \lambda + u_{n-1,m}v_{n-1,m} & v_{n-1,m} \\ u_{n-1,m} & 1 \end{pmatrix} \text{ и}$$

$$M = D_m^{-1} g = \begin{pmatrix} \lambda + \varepsilon + u_{n-1,m}v_{n,m-1} & v_{n,m-1} \\ u_{n-1,m} & 1 \end{pmatrix}.$$

При исследовании системы (1) мы использовали метод формальной диагонализации пары Лакса [2] и дискретный вариант метода одевания [3].

Выпишем явно некоторые из законов сохранения.

$$(D_n - 1)u_{n-1,m+1}v_{n,m} = (D_m - 1)u_{n,m}v_{n,m},$$

$$(D_n - 1)(u_{n-1,m}v_{n,m} - \frac{1}{2}(\varepsilon + u_{n-1,m+1}v_{n,m})^2) = (D_m - 1)(u_{n-1,m}v_{n,m} - \frac{1}{2}u_{n,m}^2 v_{n,m}^2),$$

$$(D_n - 1)(\frac{1}{2}u_{n,m+1}^2 v_{n+1,m}^2 + u_{n,m+1}v_{n+1,m}\varepsilon - u_{n,m+1}v_{n+1,m+1}) =$$

$$(D_m - 1)(\frac{1}{2}u_{n+1,m}^2 v_{n+1,m}^2 - u_{n+1,m}v_{n+2,m}).$$