Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Исследование нетеровости и инвариантности индекса на шкале анизотропных пространств

Туманян Ани Гагиковна
Студент (магистр)
Российско-Армянский (Славянский) университет, Институт математики и высоких технологий, Кафедра математики и математического моделирования, Ереван, Армения
E-mail: ani.tumanyan92@gmail.com

Настоящая работа посвящена определенным вопросам нетеровости и инвариантности индекса линейного ограниченного оператора на паре вложенных банаховых простанств и на шкале. В связи с этими вопросами исследуются полуэллиптические операторы, а также общие линейные ограниченные операторы.

Определение 1. Ограниченный линейный оператор A, действующий из банахова пространства X в банахово пространство Y, называется нетеровым, если выполняются следующие условия:

1) ядро оператора A является конечномерным ($dimKerA < \infty$);
2) коядро оператора A конечномерно ($dimCokerA = codimImA = dimY/ImA < \infty$);
3) область значений оператора A замкнута $\left(\overline{ImA} = ImA\right)$.

Разность между размерностью ядра и коядра называется индексом оператора.

Нетеровость операторов, значение и свойства индекса имеют важное значение для таких вопросов как существование и единственность решения, определение условий разрешимости операторного уравнения, спектральные свойства операторов [5]. В работе при изучении инвариантности индекса на паре непрерывно плотно вложенных банаховых пространств получено необходимое и достаточное условие равенства индекса в этих пространствах, а также достаточное условие для интерполяции нетеровости. Приведены примеры, демонстрирующие существенность этих условий. Эти условия, полученные для общих линейных операторов, применяются при исследовании нетеровости и инвариантности индекса для эллиптических, полуэллиптических операторов. Интерес к этим операторам связан с их многочисленными применениями в решении задач физики, химии, экономики и других областей.

Для эллиптических операторов доказана нетеровость в гладких компактных многообразиях с краем и без края [1], получена формула для индекса в топологических терминах [6]. В работе [1], как следствие, получена инвариантность индекса на шкале пространств Соболева, определенных на компактном многообразии.

Для полуэллиптических операторов раннее были получены следующие основные результаты. Описан класс полуэллиптических операторов с постоянными коэффициентами в R^n [2,3], получена нетеровость для одного класса полуэллиптических операторов с переменными коэффициентами в весовых пространствах Соболева [4].

Пусть

$$P\left(x,D\right) = \sum_{(\alpha:\nu)\le s} a_\alpha(x) D^\alpha$$

где $\alpha,\nu \in Z_+^n, \nu \neq 0,\ (\alpha:\nu) = \frac{\alpha_1}{\nu_1} + ... + \frac{\alpha_n}{\nu_n},\ s \in N,\ D^\alpha = D_1^{\alpha_1}...D_n^{\alpha_n},\ D_k = i\frac{\partial}{\partial x_k}$, $x = (x_1,...,x_n) \in R^n,\ n \geq 2,\ a_\alpha(x)$ бесконечно дифференцируемы и ограниченные вместе со всеми производными на всем пространстве, а

$$P_s(x,D)=\sum_{(\alpha:\nu)=s}a_\alpha(x)D^\alpha$$

называется главной частью дифференциального выражения $P(x,D)$.

Через

$$\sigma_s(x)=\sum_{(\alpha:\nu)=s}a_\alpha(x)\xi^\alpha$$

обозначим символ главной части $P(x,D)$.

Для $k\in R,\nu\in Z_+^n$, через $H_\nu^k(R^n)$ обозначим

$H_\nu^k(R^n)\equiv\{u\in S^{'}$:$\hat{u}$ - функция,$\|u\|_{k,\nu}(R^n)=(\int_{R^n}|\hat{u}(\xi)|^2(1+|\xi|_\nu)^{2k}d\xi)^{1/2}<\infty\}$, где $|\xi|_\nu=(\sum_{i=1}^n|\xi_i|^{2\nu_i})^{1/2}$, $S^{'}$ - пространство обобщенных функций медленного роста, $\hat{u}$ - преобразование Фурье функции u.

Пусть $\Omega\subset R^n$ некоторая область. Обозначим через $\dot{H}_\nu^k(\Omega)$ пополнение $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $H_\nu^k(R^n)$.

Определение 2. Скажем, что $P(x,D)$ полуэллиптический в точке $x=x_0$, если

$$\sigma_s(x_0,\xi)\neq0,\forall\xi\in R^n,|\xi|\neq0.$$

Определение 3. Скажем, что $P(x,D)$ равномерно полуэллиптический в области Ω, если существует такая положительная постоянная C, что

$$|\sigma_s(x,\xi)|\geq C|\xi|_\nu^s,\forall x\in\Omega,\forall\xi\in R^n.$$

Для $P(x,D)$ сделаем следующие обозначения:

$$\Delta(P)=\max_{(\alpha:\nu)=s}\sup_{x\in R^n}|a_\alpha(x)-a_\alpha(0)|,\delta=\inf_{|\xi|_\nu^s=1}|\sigma_s(0,\xi)|.$$

В работе доказана следующая теорема о достаточном условии инвариантности индекса и сохранении нетеровости:

Теорема 1. Пусть $P(x,D):H_\nu^{k+s}(R^n)\to H_\nu^k(R^n)$ полуэллиптический в точке $x=0$, k_0 некоторое положительное фиксированное число и существует такое положительное число ε_0, зависящее от k_0 и δ, что $\Delta(P)<\varepsilon_0$. Тогда для произвольных k_1 и k_2, таких, что $k_1,k_2\in[0,k_0)$ и $k_1<k_2$ имеет место:

если $P(x,D):H_\nu^{k_1+s}(R^n)\to H_\nu^{k_1}(R^n)$ нетеровый, то $P(x,D):H_\nu^{k_2+s}(R^n)\to H_\nu^{k_2}(R^n)$ также нетеровый, причем $ind_{k_1}(P)=ind_{k_2}(P)$.

Для равномерно полуэллиптического оператора доказана

Теорема 2. Пусть $P(x,D):\dot{H}_\nu^{k+s}(\Omega)\to\dot{H}_\nu^k(\Omega)$ равномерно полуэллиптический оператор. Если оператор $P(x,D):\dot{H}_\nu^{k_1+s}(\Omega)\to\dot{H}_\nu^{k_1}(\Omega)$ является нетеровым для некоторого значения k_1, то оператор $P(x,D):\dot{H}_\nu^{k+s}(\Omega)\to\dot{H}_\nu^k(\Omega)$ будет нетеровым для произвольного k, причем $ind_k(P)$ не зависит от k.

Если Ω ограниченная область, то имеет место

Теорема 3. Пусть $P(x,D):\dot{H}_\nu^{k+s}(\Omega)\to\dot{H}_\nu^k(\Omega)$ равномерно полуэллиптический оператор. Оператор $P(x,D):\dot{H}_\nu^{k+s}(\Omega)\to\dot{H}_\nu^k(\Omega)$ является нетеровым при произвольном значении k, причем $ind_k(P)$ не зависит от k.

Источники и литература

1) Агранович М.С., Эллиптические сингулярные интегродифференциальные операторы // Успехи Мат. Наук, 1965. т. 20, вып. 5(125). С. 3-120

2) Дарбинян А. А, Туманян А.Г., Необходимое и достаточное условие нетеровости оператора с постоянными коэффициентами // Вестник РАУ 2014 No. 2, Ер.: Изд-во РАУ 2014. С. 4-14

3) Дарбинян А. А., Туманян А. Г., Построение регуляризатора для полуэллиптического оператора // Сборник научных статей. Седьмая Годичная Научная конференция (3-7 декабря 2012), Ер.: Изд-во РАУ 2013. С. 19-23

4) Карапетян Г. А., Дарбинян А. А., Об индексе полуэллиптического оператора // Изв. НАН. Арм., Мат. 2007. Т. 42. № 5. С. 33 — 50
5) Кутателадзе С. С. Основы функционального анализа. Новосибирск, Изд.-во Института Математики, 2006
6) Atiyah M. F., Singer I.M. The index of elliptic operators on compact manifolds // Bull. Amer. Math. Soc. 1963, V. 69, pp. 422–433