Секция «Дискретная математика и математическая кибернетика»

Алгоритм объемного планирования подготовки космонавтов на МКС

Сологуб Александр Александрович[1], Гущина Варвара Павловна[2]
1 - Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Физический факультет, Москва, Россия; 2 - Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Физический факультет, Москва, Россия
E-mail: qashqay.sol@yandex.ru

1. Введение

Для планирования действий космонавтов необходимы подробные расписания проводимых на МКС работ, а также расписания подготовки космонавтов. Их разработка требует большого количества человеческих, временных и материальных ресурсов. Подготовка космонавтов является очень длительным, дорогостоящим и технически сложным процессом. Это комплекс мероприятий, направленных на формирование у космонавтов совокупности определенных знаний, и навыков, необходимых для надежного и безопасного выполнения программы космического полета и составляющих основу квалификации космонавта. В данный момент расписания составляются специалистами "в ручную", без использования какого-либо математического подхода, разумным, но неоптимальным методом. Погрешности, допущенные при составлении расписаний таким способом, накапливаются по мере работы, а так как масштаб задач велик и экономические затраты огромны, то в конечном итоге все неточности являются большими экономическими и временными издержками, которых необходимо избежать с помощью моделей и алгоритмов, разработанных в рамках проекта.

2. Математическая постановка

Обозначим индексом $i = \overline{1,3}$ – номер космонавта в данном экипаже, индексом $j = \overline{1,n}$ – номер бортового комплекса (БК), $p = \{p_l\}$, $l = \overline{1,3}$ – квалификацию по бортовому комплексу. Тогда t_{jl} – время подготовки космонавта по БК j на квалификацию p_l. Требуемое количество космонавтов по комплексу j на квалификацию p_l обозначим как n_{jl}. В итоге нужно найти распределение бортовых комплексов и квалификаций между космонавтами так, чтобы разница между общими временами подготовки была минимальна [1,2].

$$\max_i \sum_{j,l} t_{jl} x_{ijl} - \min_i \sum_{j,l} t_{jl} x_{ijl} \to \min, \tag{1}$$

$$\text{при условиях} \quad \sum_i x_{ijl} = n_{jl}, \quad j = \overline{1,k},\ l = \overline{1,3}, \tag{2}$$

$$\sum_l x_{ijl} \le 1, \quad i = \overline{1,3},\ j = \overline{1,n}, \tag{3}$$

$$x_{ijl} \in \{0,1\}. \tag{4}$$

В данной постановке введена логическая переменная x_{ijl}, которая равна 1, если БК j назначается космонавту i по специальности p_l, и равна 0 в противном случае.

3. Жадный алгоритм

Получим решение, которое затем будет использовано как нижняя граница. Инициализируем все x_{ijl} нулями и введем величину текущей длительности подготовки τ_i у космонавта i. На каждом шаге алгоритма работа с минимальным временем выполнения назначается космонавту с максимальной τ_i. Далее работы циклически назначаются в порядке убывания длительности космонавтам в порядке возрастания времени подготовки. Данный алгоритм не является оптимальным, но им может быть получена начальная оценка $d_0 = \max_j \tau_j - \min_j \tau_j$.

4. Принцип оптимальности

Поставленная задача является некоторым подобием задачи разбиения множества на три подмножества с максимально близкой суммой элементов. Для таких задач действует принцип оптимальности, заключающийся в том, что одно из оптимальных решений задачи разбиения на 3 возникает, когда каждая пара подмножеств является оптимальным решением задачи о разбиении на 2. На основе описанного принципа и строится алгоритм решения задачи об объемном планировании [2].

5. Алгоритм

В начале выбирается некоторый набор БК, которые назначаются первому космонавту, все остальные работы оптимально разбиваем на два подмножества. Из-за того, что мы не можем заранее предсказать оптимальный набор БК для первого космонавта, мы будем проходить через все допустимые решения и разбивать оставшуюся часть, алгоритмом описанным далее.

5.1. Генерация расписания первого космонавта

Стандартный способ генерации распределений – это поиск бинарным деревом, каждый лист которого представляет определенное решение. Очевидно, что число возможных назначений велико и нам придется рассмотреть. Понизим возможное число подмножеств, введя верхнюю границу [3]. Получим суммарное время подготовки среди всех участников полета, учтя (3):

$$T = \sum_i \sum_{jl} t_{jl} x_{ijl} = \sum_{jl} t_{jl} n_{jl}$$

Величина T зависит только от исходных данных. Мы хотим получить распределение работ у космонавтов, длительности которого находятся в минимальной окрестности $T/3$. Не теряя общности будем искать такие наборы, в которых первый космонавт будет иметь минимальное среди всех время подготовки. Верхней границей для суммарного времени подготовки первого космонавта будет величина $T/3$. Также можно предложить и нижнюю границу [3]. Для данного назначения работ первому космонавту минимальное значение целевой функции мы получим, если разобьем все неназначенные работы пополам (аналогично принципу оптимальности). Значение целевой функции будет равно:

$$d = \frac{T - \tau_1}{2} - \tau_1 = \frac{T - 3\tau_1}{2}$$

Разумеется, в решении мы хотим получить значения d меньшее, чем это. Это возможно достичь, если ограничить снизу время подготовки τ_1:

$$\tau_1 \geq \frac{T - 2d}{3}$$

Итак мы получили оценку для нижней границы в дереве поиска. В итоге мы можем отрезать от дерева ветви, длительность которых превысили $T/3$ и те, у которых сумма длительностей всех нераспределенных БК и текущего времени подготовки не превышает $\frac{T-2d}{3}$

5.2. Разбиение невключенных работ

Пусть мы имеем уже готовое распределение. Попробуем переназначить одного из космонавтов на другую квалификацию (например для j-ой работы переставим со специалиста на оператора). Тогда нам придется найти космонавта, которому назначена должность оператора, забрать её у него и назначить первому. При этом должно быть учтено условие (3), то есть у нас не получится просто выкинуть должность специалиста, а она должна быть переназначена тому, у кого была забрана должность оператора. Пусть мы уже имеем некоторое распределение работ для первого космонавта. Тогда между оставшимися космонавтами мы можем распределить квалификации по каждой из работ, незанятые первым космонавтом. Например, если по БК №1 первому космонавту назначена должность специалист, а требование по количеству космонавтов: $n_{1l} = \{1, 1, 1\}$, то между двумя оставшимися космонавтами мы выбираем постановку должностей оператор и исполнитель, причем постановка должности одному из космонавтов однозначно определяет постановку другому. Такая ситуация аналогична, если бы у нас был только один элемент размером $|t_{12} - t_{13}|$ и мы бы выбирали, кому из двоих космонавтов его поставить. Таким образом алгоритм разбиения оставшихся должностей между космонавтами можно представить, как subset sum problem [4] с элементами $|t_{jl} - t_{jl'}|$, где $j = \overline{1, n}$, а l, l' – индексы квалификаций неназначенных первому космонавту с ненулевым требованием числа космонавтов (если на данную работу неназначена только одна квалификация, то длительность второй просто считается нулем). К примеру, если после решения задачи разбиения получилось, что $|t_{12} - t_{13}|$ назначена второму космонавту, то это означаем, что в данном распределении второй космонавт получает БК №1 по должности оператор, а третий космонавт по должности исполнитель.

5.3. Итог

Опишем вкратце, работу алгоритма: находим некоторое решение с помощью жадного алгоритма, из него получаем начальное значение d_0, которое будет использовано для первичной оценки нижней границы. Далее мы строим бинарное дерево назначения работ первому космонавту, каждая ветвь которого отвечает тому, включаем или нет данный элемент в множество назначаемых работ. На каждой ветви проверяется выполнение верхних и нижних оценок. После достижения некоторого листа решаем задачу разбиения нераспределенных элементов между двумя оставшимися космонавтами. Из этого решения получаем новую оценку d нижней границы, которую используем в дальнейших расчетах. Алгоритм продолжается до тех пор, пока либо d не станет равным нулю, либо не будут перебраны все возможные листья.

Источники и литература

1) Рабочие материалы Научно-Исследовательского Испытательного Центра Подготовки Космонавтов имени Ю. А. Гагарина.
2) Korf, R.E. (2010). Objective functions for multiway number partitioning. In Proceedings of the Third Annual Symposium on Combinatorial Search, SOCS 2010, Stone Mountain, Atlanta, Georgia, USA, July 8-10, 2010.
3) Richard E. Korf. 2009. Multi-way number partitioning. In Proceedings of the 21st international jont conference on Artifical intelligence (IJCAI'09), Hiroaki Kitano (Ed.). Morgan Kaufmann Publishers Inc., San Francisco, CA, USA, 538-543.
4) H. Kellerer, U. Pferschy, and D. Pisinger. Knapsack Problems, Springer, Berlin, Germany, 2004.