Секция «Дискретная математика и математическая кибернетика»

Сложность схем для функции четности и функции голосования в базисе антицепных функций

Подольская Ольга Викторовна

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дискретной математики, Москва, Россия
E-mail: olgavikonov@gmail.com

В работе изучается сложность реализации булевых функций схемами из функциональных элементов в бесконечном базисе всех антицепных функций, т. е. функций, принимающих значение 1 лишь на попарно несравнимых наборах. Этот базис обозначается через AC [1].

Определение схемы и некоторые другие используемые понятия даны в [3]. Сложностью схемы называется число элементов в этой схеме, а сложностью функции — наименьшая сложность схемы в базисе AC, реализующей эту функцию. Сложность функции f обозначается через $L(f)$. Функцией Шеннона называется функция $L(n) = \max L(f)$, где максимум берется по всем булевым функциям f от n переменных. По существу, при каждом n значение функции Шеннона — это количество функциональных элементов, достаточное для реализации схемой в рассматриваемом базисе любой булевой функции от n переменных.

Булева функция $p_n(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \ldots + x_n \pmod 2$ называется функцией четности. Булева функция $m_n(x_1, \ldots, x_n)$, принимающая значение 1 на тех и только тех входах, в которых число единиц не меньше $n/2$, называется функцией голосования. Считается, что некоторое свойство выполняется для почти всех функций от n переменных, если отношение числа функций, для которых свойство выполнено, к общему числу функций от n переменных стремится к единице при $n \longrightarrow \infty$.

В работах [1, 2, 4] изучались нижние оценки сложности схем, реализующих булевы функции, в базисе AC. В [1] была доказана нижняя оценка порядка $n^{1/3}$ сложности функции четности от n переменных. Тем самым также была установлена нижняя оценка порядка $n^{1/3}$ функции Шеннона. Далее в [2] была получена нижняя оценка порядка $(n/\ln n)^{1/2}$ сложности функции четности и, соответственно, функции Шеннона. Развитие метода из [1] позволило улучшить последний результат: в [4] доказана нижняя оценка порядка $\sqrt{n}$ сложности функции четности, функции голосования и почти всех функций от n переменных. Таким образом, в базисе AC была установлена нижняя оценка порядка $\sqrt{n}$ функции Шеннона.

В данной работе получены точные значения сложности реализации схемами в базисе AC функций четности и голосования от n переменных для всех натуральных n: $L(p_n) = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$, $L(m_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$. В частности, этот результат устанавливает нижнюю оценку порядка n функции Шеннона.

Кроме того, в [1] указана оценка функции Шеннона $L(n) \leq n+1$ для всех натуральных n, а в [5] установлена оценка $L(n) \leq n$. Последняя оценка и нижняя оценка функции Шеннона из первого результата данной работы в совокупности устанавливают, что в базисе AC функция Шеннона по порядку роста равна n.

Источники и литература

1) Касим-Заде О. М. О сложности схем в одном бесконечном базисе // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 1994. No. 6. С. 40–44.

2) Касим-Заде О. М. О сложности реализации булевых функций схемами в одном бесконечном базисе. Дискретный анализ и исследование операций. Январь-март 1995. Том 2, No. 1, С. 7–20.

3) Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. Издательство Моск. ун-та. Москва, 1984.

4) Подольская О. В. О нижних оценках сложности схем в базисе антицепных функций // Вестник Моск. ун-та. Сер.1. Математика, механика. 2013. No. 2. С. 17–23.

5) Подольская О. В. Об оценках сложности схем в одном бесконечном базисе // Материалы IX Молодежной научной школы по дискретной математике и ее приложениям. Москва. 16–23 сентября 2013 г. Том 2, С. 97–100.

Слова благодарности

Автор выражает признательность О. М. Касим-Заде за внимание к данной работе.