Секция «Дискретная математика и математическая кибернетика»

Верхняя оценка сложности схем для линейной функции в одном бесконечном базисе

Комбаров Юрий Анатольевич

Кандидат наук

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дискретной математики, Москва, Россия

E-mail: yuri.kombarov@gmail.com

В работе изучаются схемы из функциональных элементов [1], реализующие линейные булевы функции (однородную линейную функцию $l_n(x_1,\ldots,x_n)=x_1\oplus\ldots\oplus x_n$ и неоднородную линейную функцию $\overline{l_n}(x_1,\ldots,x_n)=x_1\oplus\ldots\oplus x_n\oplus 1$). Сложность реализации линейных функций схемами (определяемая как минимальное количество функциональных элементов, достаточное для реализации функции f схемой в заданном базисе B и обозначаемая как $L_B(f)$) известна для многих базисов, состоящих из элементов с не более, чем двумя входами. Например, в работе [2] доказано, что $L_{\{x\&y,x\vee y,\overline{x}\}}(l_n)=L_{\{x\&y,x\vee y,\overline{x}\}}(\overline{l_n})=4n-4$, а из результатов работ [3] и [4] следует, что $L_{\{x|y\}}(l_n)=4n-4$ и $L_{\{x|y\}}(\overline{l_n})=4n-3$ (здесь $x|y$ обозначает функцию штрих Шеффера, определяемую как $x|y=\overline{x\&y}$). Сложность линейных функций известна также для базиса U_2, состоящего из всех элементов, реализующих нелинейные функции, существенно зависящие от двух переменных. В работе [5] доказано, что $L_{U_2}(l_n)=L_{U_2}(\overline{l_n})=3n-3$.

Для некоторых базисов известна структура минимальных схем. Так, в работе [6] показано, что все минимальные схемы, реализующие l_n или $\overline{l_n}$ в базисе $\{x\&y,x\vee y,\overline{x}\}$, состоят из $n-1$ четырехэлементого блока, каждый из которых реализует линейную функцию от двух переменных. В работе [4] аналогичный факт доказан для схем, реализующих однородные линейные функции в базисе $\{x|y\}$.

Сложность реализации линейных функций известна и для некоторых базисов, содержащих многовходовые элементы. Один из первых результатов в этом направлении получен в работе [7]. В этой работе рассматриваются минимальные схемы, реализующие линейные функции в базисе NOR, состоящем из всех элементов, реализующих функции вида $\overline{x_1\vee\ldots\vee x_k}$ ($k\in\{2,3,\ldots\}$). Доказано, что $L_{NOR}(l_2)=5$, $L_{NOR}(\overline{l_2})=4$, а при $n\geq 3$ верно, что $L_{NOR}(l_n)=L_{NOR}(\overline{l_n})=3n-2$. По соображениям двойственности этот результат переносится на базис $NAND$, состоящий из всех элементов, реализующих функции вида $\overline{x_1\&\ldots\&x_k}$ ($k\in\{2,3,\ldots\}$): при $n\geq 3$ верно, что $L_{NAND}(l_n)=L_{NAND}(\overline{l_n})=3n-2$.

В работе [8] исследуются схемы, реализующие линейные функции в различных базисах из многовходовых элементов. Для базиса T, состоящего из всех элементов, реализующих пороговые булевы функции, доказано, что $L_T(l_n)=L_T(\overline{l_n})=\lceil\log(n+1)\rceil$. Также в работе [8] рассматриваются схемы, реализующие линейные функции в базисе U_∞. Базис U_∞ состоит из всех элементов, реализующих функции вида $(x_1^{\sigma_1}\&\ldots\&x_k^{\sigma_k})^\beta$, где $k\in\{2,3,\ldots\}$, а $\sigma_1,\ldots,\sigma_k,\beta\in\{0,1\}$. Этот базис является естественным обобщением базиса U_2. В работе [8] доказано, что $2n-1\leq L_{U_\infty}(l_n)\leq\lceil(5n-4)/2\rceil$ и $2n-1\leq L_{U_\infty}(\overline{l_n})\leq\lceil(5n-4)/2\rceil$. Настоящая работа посвящена улучшению двух последних оценок. Основным результатом работы является следующая

Теорема 1. *При $n\geq 2$ верно, что*

$$L_{U_\infty}(l_n)\leq\left\lfloor\frac{7n-4}{3}\right\rfloor, L_{U_\infty}(\overline{l_n})\leq\left\lfloor\frac{7n-4}{3}\right\rfloor$$

Для доказательства теоремы построена последовательность схем в базисе U_∞; n-ая схема последовательности реализует l_n со сложностью $\left\lfloor\frac{7n-4}{3}\right\rfloor$. На рисунке изображена построенная схема для l_6 ($n=6$ это наименьшее n для которого оценка доказанной теоремы лучше верхней оценки работы [8]). Все элементы на рисунке — конъюнкторы, кружок у входа элемента означает, что на вход навешено отрицание.При помощи перебора схем на компьютере проверено, что построенные схемы минимальны при $n = 2, 3, 4, 5, 6$. Автор предполагает, что построенные схемы минимальны для всех n.

Источники и литература

1) Лупанов О.Б., Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1984.
2) Редькин Н.П., Доказательство минимальности некоторых схем из функциональных элементов // Проблемы кибернетики. 1970. № 23. 83–101.
3) Редькин Н.П., О минимальной реализации линейной функции схемой из функциональных элементов // Кибернетика. 1971. № 6. 31–38.
4) Комбаров Ю.А. О минимальных схемах в базисе Шеффера для линейных булевых функций // Дискретный анализ и исследование операций. 2013. 20, № 4. 65–87.
5) Schnorr C.P., Zwei lineare untere Schranken fur die Komplexitat Boolescher Funktionen // Computing. 1974. 13. 155-171.
6) Комбаров Ю.А. О минимальных реализациях линейных булевых функций // Дискретный анализ и исследование операций. 2012. 19, №3. 39–57.
7) Lai H.Ch., Muroga S., Logic networks with a minimum number of NOR (NAND) gates for parity functions of n variables // IEEE Transactions on computers. 1987. vol. C-36, no. 2. 157–166.
8) Wegner I., The complexity of the parity function in unbounded fan-in, unbounded depth circuits // Theoretical Computer Science. 1991. 85. 155–170.

Слова благодарности

Автор выражает благодарность своему научному руководителю проф. Н.П. Редькину за внимание и помощь в работе.

Иллюстрации

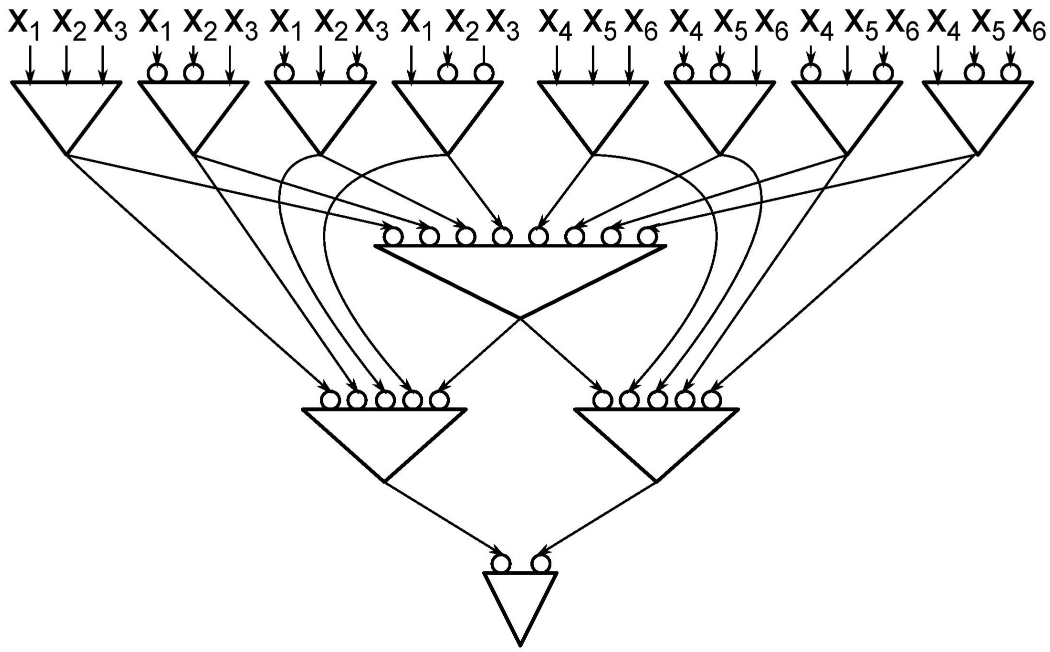

Рис. 1