Секция «Гидромеханика»

Общее и квазиточные решения в задаче осесимметричного течения в приближении пограничного слоя

Кочанов Марк Борисович

Аспирант

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, Россия

E-mail: gmrak1990@gmail.com

Рассматривается установившееся осесимметричное течение несжимаемой вязкой жидкости над плоским горизонтальным дном. Изучается течение в тонком слое, когда допустимо использовать приближение пограничного слоя. Внешнее поле давления предполагается постоянным. В качестве граничного условия рассматривается условие непротекания жидкости при отсутствии трения. С учетом введенных ограничений система уравнений для компонент вектора скорости примет вид

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{x}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{1}$$

$$\frac{\partial(xu)}{\partial x}+\frac{\partial(xv)}{\partial y}=0. \tag{2}$$

Путем оценок величин в задаче частью слагаемых в уравнении можно пренебречь.

Путем ввода потенциала скоростей система уравнений (1), (2) сводится к уравнению третьего порядка [1]

$$\frac{1}{x}\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}-\frac{1}{x^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2-\frac{1}{x}\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\nu\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}=0. \tag{3}$$

Уравнение (3) допускает группу растяжений. После перехода к автомодельным переменным имеем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\nu\frac{d^3H}{dz^3}+(2-\beta)\,H(z)\frac{d^2H}{dz^2}+(2\beta-1)\left(\frac{dH}{dz}\right)^2=0, \tag{4}$$

содержащее произвольную постоянную β, возникающую при переходе к автомодельным переменным.

При $\beta=1$ найдены два решения уравнения (4), выраженные через гиперболическую функцию и функции Эйри, соответственно. Второе из решений имеет вид

$$\begin{gathered} H(z)=\left(4\nu^2C_1\right)^{\frac{1}{3}}\frac{\left(C_3\mathrm{Ai}(\theta)+\mathrm{Bi}(\theta)\right)'}{C_3\mathrm{Ai}(\theta)+\mathrm{Bi}(\theta)},\quad \theta=\left(\left(\frac{C_1}{2\nu}\right)^{\frac{1}{3}}\left(z+\frac{C_2}{C_1}\right)\right),\\ C_3=-\frac{\mathrm{Bi}'(\alpha)}{\mathrm{Ai}'(\alpha)},\quad \alpha=\frac{C_2}{(2\nu C_1^2)^{\frac{1}{3}}}. \end{gathered} \tag{5}$$

Найдено три типа течений в зависимости от значений постоянных интегрирования C_1, C_2. Первый случай (Рис. 1) дает картину течения как в задаче с трением на нижней границе области. Во всей области вертикальная компонента скорости имеет постоянный знак. Во втором случае (Рис. 2) область состоит из двух частей, в каждой из которых вертикальная компонента скорости имеет свой знак. В третьем случае (Рис. 3) в задаче возникает поверхность в форме конуса, через которую не проходят линии тока.

В случае $\beta\neq 1$ уравнение (4) не интегрируется аналитически. Найдено квазиточное решение — аналитическое приближенное решение [2]. Алгоритм нахождения квазиточного решения основан на методе простейших уравнений.

Источники и литература

1) R. Naz, D. P. Mason, F. M. Mahomed, Conservation laws and conserved quantities for laminar two-dimensional and radial jets // Nonlinear Anal. Real World Appl., 2009 (10), 2641–2651
2) N. A. Kudryashov, M. B. Kochanov, Quasi-exact solutions of nonlinear differential equations // Appl. Math. Comput., 2012 (219), 1793–1804

Слова благодарности

Автор выражает благодарность профессору, д.ф.-м.н. Кудряшову Н.А.

Иллюстрации

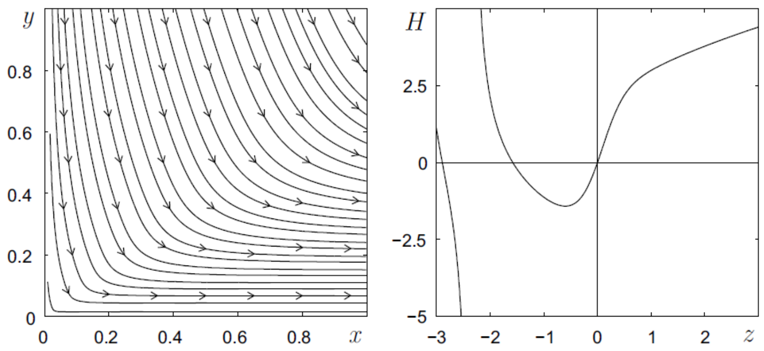

Рис. 1. Функция $H(z)$ (5) и соответствующее поле скоростей при $\nu = 1/2$, $C_1 = 5$, $C_2 = 5$

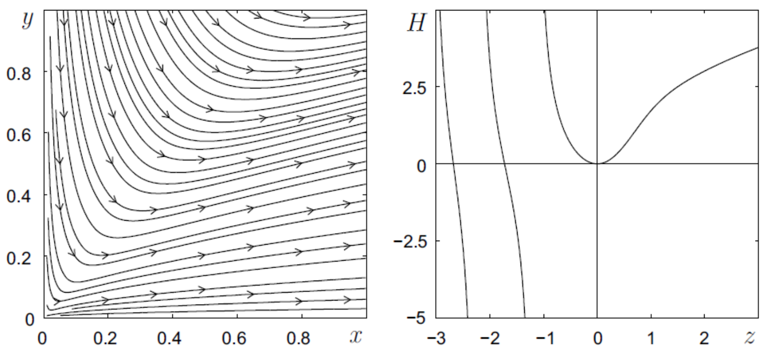

Рис. 2. Функция $H(z)$ (5) и соответствующее поле скоростей при $\nu = 1/2$, $C_1 = 5$, $C_2 = 0$

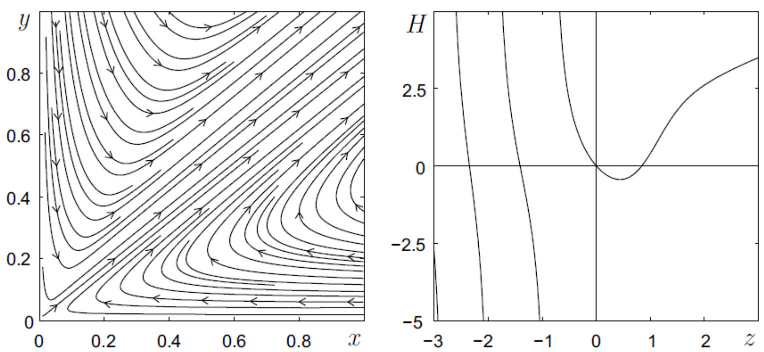

Рис. 3. Функция $H(z)$ (5) и соответствующее поле скоростей при $\nu = 1/2$, $C_1 = 5$, $C_2 = -2$