

Topological types of spectra for Schrödinger operators with the potentials that are the singular finite-gap solutions of Koerteveg-de Vries equation

Назаров Алексей Леонидович

Студент (магистр)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,

Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: alexey.l.nazarov@gmail.com

Алгебраическая кривая и дивизор на ней служат источниками данных для построения функций Бейкера-Ахиезера, которые являются собственными для одного или нескольких дифференциальных операторов, связанными коммутационными соотношениями [1]. Функции, возникающие как потенциалы для этих операторов, позволяют проинтегрировать нелинейные уравнения, описывающие физические процессы (цепочка Тода, уравнения Кадомцева-Петвиашвили, синус-Гордона и др.).

Собственные функции БА одномерного оператора Шредингера строятся по гиперэллиптической кривой Γ [1] следующим образом: они имеют полюса 1-го порядка в точках дивизора и асимптотику $\psi(x, z) = e^{ikx}(1 + o(1/k))$, где $z = 1/k$ - локальная координата в окрестности точки Вейерштрасса $P = \infty$; квазиимпульс dp - мероморфный дифференциал второго рода такой, что вблизи точки P он имеет разложение $dp = dk + O(1)$.

Функции $\psi(x, z)$ должны быть мероморфны по спектральному параметру z , они ортогональны при соответствующих условиях [2]. В этом случае на множестве точек римановой поверхности (контуре), где функции $\psi(x, z)$ ограничены, возможно ввести обладающий важными для физических приложений (например, в теории струн) мультипликативными свойствами аналог преобразования Фурье в пространстве функций со скалярным произведением, индефинитным в полюсах функций БА [2].

Рассматриваемый контур образован траекториями слоения квадратичного дифференциала $\eta = (dp)^2$, которые отвечают нулевым линиям уровня функции $z \mapsto \text{Im} \int_0^z dp(\lambda)d\lambda$ (задает локальный гомеоморфизм $\Gamma \rightarrow \mathbb{C}$). Локальные топологические свойства контура зависят от того, лежат ли на нем критические точки η , и какого они порядка [4]; глобальные же свойства определяются принципом максимума модуля. Траектории квадратичного дифференциала η , проходящие через его нули, называются критическими (или сепаратрисами).

Множество точек $\sigma_w = \{z \in \mathbb{C} | \text{Im} \int_0^z dp = 0\}$ назовем “спектром оператора в расширенном смысле” или “расширенным спектром”, т.к. в конечнозонном случае всех вещественных точек ветвления Γ оно совпадает со спектром оператора Шредингера в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ [1]. В иных случаях, исследованием функции Грина оператора, обладающего собственными функциями БА, доказывалось, что дополнение его резольвентного множества содержится в σ_w .

В настоящей работе для гиперэллиптических кривых родов 1, 2 и 3 с одной вещественной и остальными комплексно-сопряженными точками ветвления, рассматриваются расширенные спектры оператора Шредингера. Собственные функции Бейкера-Ахиезера последних определяются дифференциалами нормированными так, что их периоды чисто вещественные по всем циклам на этих кривых [3], а потенциалы имеют полюса второго порядка [2]. На основе теоретического анализа и результатов численных экспериментов выявлены допустимые топологические типы спектров σ_w для рассматриваемого семейства операторов, определены их стабильные конфигурации. Соответствующие типы контуров на римановых поверхностях классифицированы аппаратом теории графов [5], выписаны паспорта порождаемых ими карт.

На Рис. 1 показан пример стабильной конфигурации расширенного спектра, на Рис. 2 - вид графа на римановой поверхности как на сфере с ручками, полученный с помощью конструкции, предложенной в [6]. примера. Порождающие расширенный спектр траектории квадрата дифференциала $dp(z) = (z^3 - 3.4836z^2 + 3.7478z - 1.2838) \frac{dz}{w}$ на кривой $w^2 = z^7 - 0.72z^6 + 42.9671z^5 - 27.4639z^4 + 30.0669z^3 - 51.0265z^2 + 100.253z$ рода 3 образуют на ней граф нестабильной конфигурации с паспортом $[4^2 6^2, 2^{10}, 10^2]$ (Рис. 3). Дифференциал $dp(z) = (z^3 - 4.1416z^2 + 9.8332z - 0.0774) \frac{dz}{w}$ имеет на кривой $w^2 = z^7 + 14.46z^6 + 110.425z^5 + 519.582z^4 + 1635.33z^3 + 3195.42z^2 + 3384.16z$ чисто вещественные периоды, паспорт образованного контуром графа $[4^6 6^1, 2^{11}, 11^2]$ (Рис. 4). Отметим, что рассмотренные дифференциалы являются дифференциалами Дженкинса-Штребеля (т.к. их критический граф компактен), которые также имеют приложение в теории струн [7].

При численном определении нормирующих констант и построении линий уровня функции $Im \int_0^z F dz$ возникали интегралы, подынтегральная функция F которых имеет корневую особенность в знаменателе в точке $y = b$, $y \in \mathbb{R}$. Представим ее в виде $F(y) = f(y)/\sqrt{b-y}$, тогда интегрирование можно осуществить по приближенной формуле $\int_a^b f(y) dy / \sqrt{b-y} \approx \frac{2}{3} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{r_i - r_{i+1}}{r_i + r_{i+1}} [f(y_i)(r_i + 2r_{i+1}) + f(y_{i+1})(2r_i + r_{i+1})]$, $r_i = \sqrt{b-y_i}$, $y_i = a + ih$, $h = (b-a)/N$, точность которой $o(h^2)$. Приведенные числовые примеры получены при $h = 0.01$.

Источники и литература

- 1) Б. А. Дубровин, В. Б. Матвеев, С. П. Новиков, “Нелинейные уравнения типа Кортевега-де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия”, УМН, 31:1(187) (1976), 55–136
- 2) П. Г. Гриневич, С. П. Новиков, “Сингулярные конечнозонные операторы и indefinite метрики”, УМН, 64:4(388) (2009), 45–72
- 3) И. М. Кричевер, “Спектральная теория «конечнозонных» нестационарных операторов Шредингера. Нестационарная модель Пайерлса”, Функ. анализ и его прил., 20:3 (1986), 42–54
- 4) J. A. Jenkins, *Univalent Functions and Conformal Mapping*, Springer, Berlin (1958)
- 5) А. К. Звонкин, С. К. Ландо, *Графы на поверхностях и их приложения*, М.: МЦНМО (2010)
- 6) G. Springer, *Introduction to Riemann surfaces*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts (1957)
- 7) M. Kontsevich, “Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function”, *Communications in Mathematical Physics*, 147 (1992), 1–23.

Слова благодарности

Автор выражает благодарность академику С. П. Новикову за постановку задачи и направляющие комментарии, П. Г. Гриневичу за внимательное научное руководство, а также С. К. Ландо и А. И. Аптекареву за важные замечания.

Иллюстрации

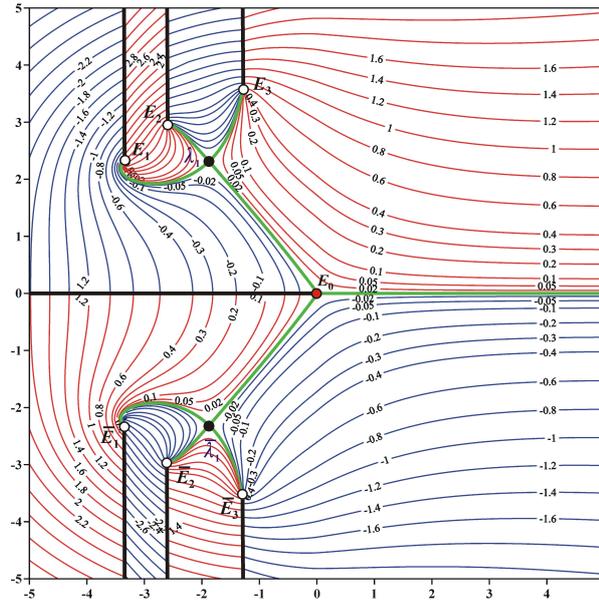


Рис. 1. Расширенный спектр σ_w , когда вещественная точка ветвления кривой Γ является нулем dp на \mathbb{C} , а его комплексные нули лежат на траекториях, образующих контур

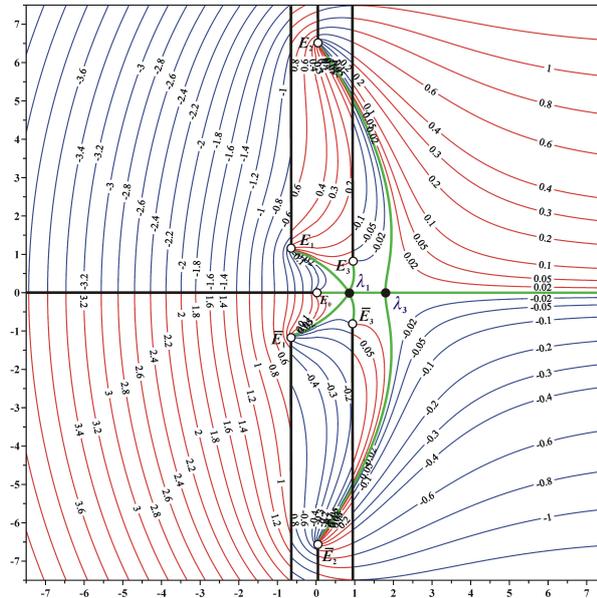


Рис. 2. Расширенный спектр σ_w , один из вещественных нулей дифференциала dp на \mathbb{C} имеет кратность 2 и расположен правее вещественной точки ветвления кривой Γ .

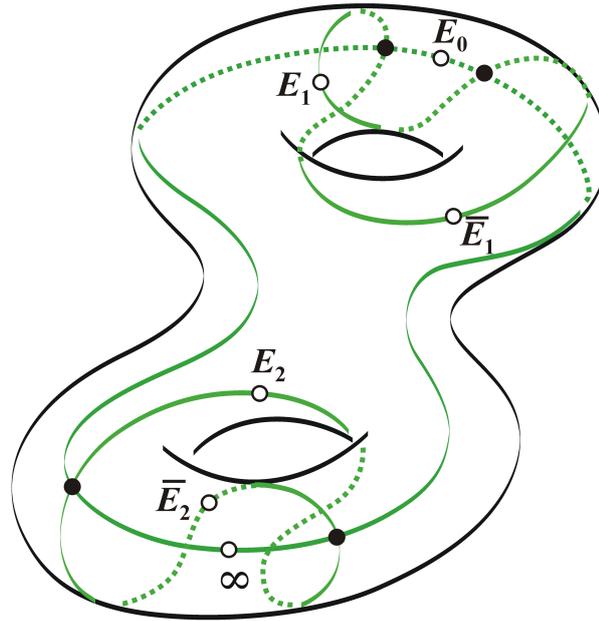


Рис. 3. Отвечающий σ_w с Рис. 1 граф на римановой поверхности рода 2 с паспортом $[4^4, 2^8, 8^2]$.

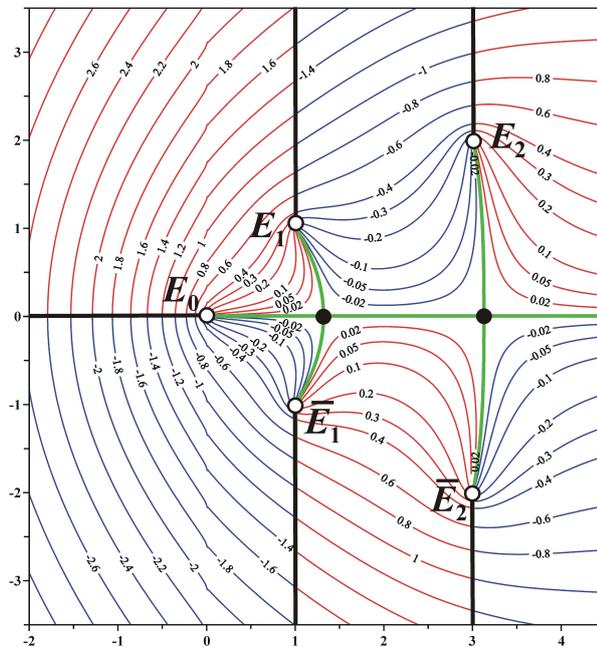


Рис. 4. Расширенный спектр σ_w оператора Шредингера, построенного по алгебраической кривой $w^2 = z^5 - 8z^4 + 32z^3 - 48z^2 + 36z$.