Секция «Геометрия и топология»

Топологические инварианты движения эллипсоида по гладкой плоскости

Сечкин Георгий Михайлович

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,

Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: ego-rish@ya.ru

Во время доклада мы рассмотрим эллипсоид вращения, движущийся по гладкой горизонтальной плоскости, под действием силы тяжести, и посмотрим на топологические инварианты, классифицирующие слоения Лиувилля с точностью до лиувиллевой эквивалентности.
Две системы эквивалентны, если у них совпадают замыкания интегральных траекторий, решений систем. Распределение масс таково, что тело обладает осью динамической симметрии, которая совпадает с осью геометрической симметрии, причем центр масс лежит на этой оси (аналог волчка Лагранжа) на расстоянии s от центра тела. Будут представленны бифуркационные диаграммы и представленны топологические инварианты Фоменко-Цишанга. Таким образом, мы полностью проведем анализ лиувиллевой эквивалентности. После этого сравним полученные результаты с известными ранее и рассмотрим несколько систем частично (т.е. при некоторых значениях первых интегралов) или полностью эквивалентных нашей.
Системы уравнений и первые интагралы:
Уравнения Эйлера-Пуассона можно переписать в виде уравнений Гамильтона для системы с двумя степенями свободы. Тогда фазовое пространство системы представляется как орбита коприсоедененного представления шестимерной алгебры Ли. $e(3) = SO(3) \oplus \mathbf{R^3}$.
Чтобы ввести координаты на коалгебре $e(3)^*$ перейдем от угловой скорости к каноническим импульсам

$$\mathbf{S} = \mathbf{M^{-1}}\bar{\omega}, \bar{\gamma} = \mathbf{R}.$$

Где $\mathbf{M}$ - некая симметрическая матрица.
Последнее соотношение просто переобозначение. Интеграл энергии E в системе $(\bar{\omega}; \bar{\gamma})$ перейдет в гамильтониан на $e(3)^*$ в системе $(\mathbf{S}, \mathbf{R})$.
Интегралы Γ и G переходят в функции Казимира скобки Пуассона, коммутирующие с любой функцией от $\mathbf{S}, \mathbf{R}$: $\Gamma = \langle \mathbf{R}, \mathbf{R} \rangle, \mathbf{G} = \langle \mathbf{S}, \mathbf{R} \rangle$.
Из (**??**) следуют уравнения Кирхгофа:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{S}} = [\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{S}}; \mathbf{S}] + [\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{R}}; \mathbf{R}], \\ \dot{\mathbf{R}} = [\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{S}}; \mathbf{R}] \end{cases} \tag{1}$$

Данные интегралы естественны для задачи о движении твердого тела, они получаются без ограничений на форму и динамику рассматриваемого объекта. Однако, для полной интегрируемости нам недостает одного независимого интеграла, который в данной постановке существует $K = S_3$ - интеграл Лагранжа.
Известные случаи эквивалентности:
Жуковский обнаружил обобщение интегрируемого случая Эйлера, с гамильтонианом $H = \Sigma \frac{(S_i + \lambda_i)^2}{2A_i}, i \in 1, 2, 3$. Дополнительный интеграл такой же, как и в случае Эйлера $K = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$. Исследование было проведено разными авторами, полный результат содержится в книге А.В. Болсинова и А.Т. Фоменко Интегрируемы и гамильтоновы системы.
Теорема 1: Система динамически симметричного эллипсоида на гладкой плоскости полностью вкладывается, в смысле лиувиллевой эквивалентности, в систему тяжелого гиростата Жуковского. Таким образом, для любого значения параметров задачи эллипсоида

существуют такие параметры системы Жуковсого, для которых инварианты совпадают.

Источники и литература

1) А . В . Болсинов А . Т . Фоменко Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация.

Иллюстрации

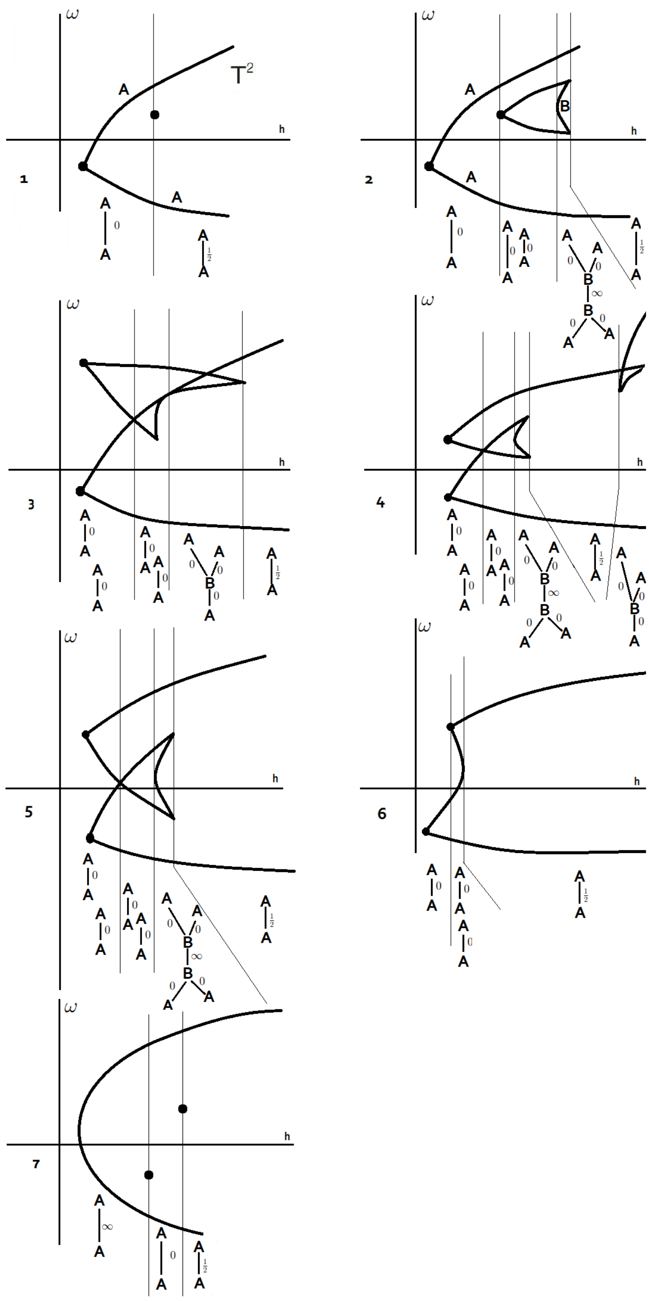

Рис. 1. Числовые r-метки на бифуркационной диаграмме