

Задача 1

В-1 У Нади в аквариуме живут 5 рыбок. Каждый день в обед она насыпает им 30 граммов корма. Каждая рыбка съедает пропорциональное ее весу количество корма, причем к вечеру масса каждой рыбки увеличивается на 0.1% от съеденного. Сегодня утром массы рыбок в граммах были таковы: (1, 3, 4, 6, 14). Какова будет масса самой тяжелой рыбки через 60 дней вечером?

Ответ: 14.9

Решение. Можно считать, что есть всего две рыбки: самая тяжелая и сумма всех остальных. После этого ответ вычисляется просто: $\frac{XKY}{2 \cdot 100} + M_N$. (Где X — масса корма в день, K — число дней, Y — процент увеличения массы, M_N — масса самой тяжёлой рыбки).

В-2 У Нади в аквариуме живут 5 рыбок. Каждый день в обед она насыпает им 25 граммов корма. Каждая рыбка съедает пропорциональное ее весу количество корма, причем к вечеру масса каждой рыбки увеличивается на 0.2% от съеденного. Сегодня утром массы рыбок в граммах были таковы: (2, 3, 3, 7, 15). Какова будет масса самой тяжелой рыбки через 62 дней вечером?

Ответ: 16.55

В-3 У Нади в аквариуме живут 6 рыбок. Каждый день в обед она насыпает им 30 граммов корма. Каждая рыбка съедает пропорциональное ее весу количество корма, причем к вечеру масса каждой рыбки увеличивается на 0.1% от съеденного. Сегодня утром массы рыбок в граммах были таковы: (1, 3, 4, 4, 9, 21). Какова будет масса самой тяжелой рыбки через 64 дней вечером?

Ответ: 21.96

В-4 У Нади в аквариуме живут 6 рыбок. Каждый день в обед она насыпает им 25 граммов корма. Каждая рыбка съедает пропорциональное ее весу количество корма, причем к вечеру масса каждой рыбки увеличивается на 0.2% от съеденного. Сегодня утром массы рыбок в граммах были таковы: (2, 3, 6, 9, 9, 29). Какова будет масса самой тяжелой рыбки через 66 дней вечером?

Ответ: 30.65

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике
Отборочный этап 2023/24 учебного года для 10 класса

Задача 2

В-1 Числа x, y таковы, что $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = 5$. Найдите $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Ответ: 2.9

Решение. По условию, $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{(x+y)^2 + (x-y)^2}{(x-y)(x+y)} = 2\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = 5$, поэтому $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{5}{2} + \frac{2}{5} = 2.9$.

В-2 Числа x, y таковы, что $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = 10$. Найдите $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Ответ: 5.2

В-3 Числа x, y таковы, что $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = 20$. Найдите $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Ответ: 10.1

В-4 Числа x, y таковы, что $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = 8$. Найдите $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Ответ: 4.25

Задача 3

В-1 Ровно в 8:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 72 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 11:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 3 км/ч?

Ответ: 24

Решение. Если рассмотреть движение относительно реки, то второй катер за время прошел с собственной скоростью путь от пункта B до середины C отрезка AB и обратно. Поэтому его скорость равна $72/(11 - 8)$, причём независимо от скорости течения реки. Например, в первом варианте ответ: 24.

В-2 Ровно в 9:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 69 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 12:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 2 км/ч?

Ответ: 23

В-3 Ровно в 7:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 70 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 12:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 4 км/ч?

Ответ: 14

В-4 Ровно в 6:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 85 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 11:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 3 км/ч?

Ответ: 17

В-5 Ровно в 8:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 52 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 10:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 2 км/ч?

Ответ: 26

В-6 Ровно в 9:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 57 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 12:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 4 км/ч?

Ответ: 19

В-7 Ровно в 7:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 72 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 11:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 3 км/ч?

Ответ: 18

В-8 Ровно в 6:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 64 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 10:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 2 км/ч?

Ответ: 16

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике
Отборочный этап 2023/24 учебного года для 10 класса

Задача 4

В-1 Найдите наименьшее значение выражения $(a + 2)(b + 2)(c + 2)$, если a, b, c — положительные числа, удовлетворяющие условию $abc = 1$.

Ответ: 27

Решение. (Для 1 варианта) По неравенству о средних имеем

$$(a + 2)(b + 2)(c + 2) = (a + 1 + 1)(b + 1 + 1)(c + 1 + 1) \geq 3a^{\frac{1}{3}}3b^{\frac{1}{3}}3c^{\frac{1}{3}} = 27(abc)^{\frac{1}{3}},$$

причём равенство достигается при $a = b = c = 1$.

В-2 Найдите наименьшее значение выражения $(a + 3)(b + 3)(c + 3)$, если a, b, c — положительные числа, удовлетворяющие условию $abc = 1$.

Ответ: 64

В-3 Найдите наименьшее значение выражения $(a + 4)(b + 4)(c + 4)$, если a, b, c — положительные числа, удовлетворяющие условию $abc = 8$.

Ответ: 216

В-4 Найдите наименьшее значение выражения $(a + 6)(b + 6)(c + 6)$, если a, b, c — положительные числа, удовлетворяющие условию $abc = 27$.

Ответ: 729

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2023/24 учебного года для 10 класса

Задача 5

В-1 В ресторане «Обломов» выпекают 3 вида пирожков: с мясом, с рыбой, с грибами. Повар обратил внимание, что 25 ноября среди тех, кто заказывал по 4 пирожка, не повторился ни один набор пирожков. Какое максимальное количество посетителей «Обломова» могли заказать в этот день по 4 пирожка?

Ответ: 15

Решение. Решение. Задача на число сочетаний с повторениями. Количество выбираемых элементов $r = 4$. Количество видов продукции $n = 3$. То есть, количество «перегородок» $n - 1 = 2$.

Воспользуемся формулой $C_{r+n-1}^r = \frac{(r+n-1)!}{r! \cdot (n-1)!} = C_6^4 = 15$

В-2 В ресторане «Обломов» выпекают 4 вида пирожков: с мясом, с рыбой, с грибами и с капустой. Повар обратил внимание, что 25 ноября среди тех, кто заказывал по 5 пирожков, не повторился ни один набор пирожков. Какое максимальное количество посетителей «Обломова» могли заказать в этот день по 5 пирожков?

Ответ: 56

В-3 В ресторане «Обломов» выпекают 4 вида пирожков: с мясом, с рыбой, с грибами и с капустой. Повар обратил внимание, что 25 ноября среди тех, кто заказывал по 4 пирожка, не повторился ни один набор пирожков. Какое максимальное количество посетителей «Обломова» могли заказать в этот день по 4 пирожка?

Ответ: 35

В-4 В ресторане «Обломов» выпекают 3 вида пирожков: с мясом, с рыбой, с грибами. Повар обратил внимание, что 25 ноября среди тех, кто заказывал по 5 пирожков, не повторился ни один набор пирожков. Какое максимальное количество посетителей «Обломова» могли заказать в этот день по 5 пирожков?

Ответ: 21

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2023/24 учебного года для 10 класса

Задача 6

В-1 Решите уравнение

$$|x + |x + |x|| \cdot || - y| - y| - y| = 2023.$$

в целых числах. В ответ впишите сумму $|x| + |y|$ для той пары решений, для которых величина $|x| + |y|$ минимальна.

Ответ: 136

Решение. Для первого варианта: заметим, что $2023 = 7 \cdot 17^2$.

1) Если $x \geq 0$, то первый множитель равен $3x$ и уравнение решений не имеет.

2) Если $y \leq 0$, то второй множитель равен $-3y$ и уравнение решений не имеет.

3) Пусть $x < 0$, $y > 0$. Уравнение примет вид $-xy = 0$, откуда возможны решения: $x = -1$; $y = 2023$, $x = -7$; $y = 289$, $x = -17$; $y = 119$, $x = -119$; $y = 17$, $x = -2023$; $y = 1$.

$\min(|x| + |y|) = 17 + 119 = 136$.

В других вариантах: $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$. Все решения: $(-1; 2024)$, $(-2; 1012)$, $(-4; 506)$, $(-8; 253)$, $(-11; 184)$, $(-22; 92)$, $(-44; 46)$ и т.д. $\min(|x| + |y|) = 44 + 46 = 90$.

$2021 = 43 \cdot 47$. Все решения: $(-1; 2021)$, $(-43; 47)$, $(-47; 43)$, $(-2021; 1)$. $\min(|x| + |y|) = 43 + 47 = 90$.

$2030 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 29$. Все решения: $(-1; 2030)$, $(-2; 1015)$, $(-5; 406)$, $(-7; 290)$, $(-10; 203)$, $(-14; 145)$, $(-29; 70)$, $(-35; 58)$, и т.д. $\min(|x| + |y|) = 35 + 58 = 93$.

В-2 Решите уравнение

$$|x + |x + |x|| \cdot || - y| - y| - y| = 2024.$$

в целых числах. В ответ впишите сумму $|x| + |y|$ для той пары решений, для которых величина $|x| + |y|$ минимальна.

Ответ: 90

В-3 Решите уравнение

$$|x + |x + |x|| \cdot || - y| - y| - y| = 2021.$$

в целых числах. В ответ впишите сумму $|x| + |y|$ для той пары решений, для которых величина $|x| + |y|$ минимальна.

Ответ: 90

В-4 Решите уравнение

$$|x + |x + |x|| \cdot || - y| - y| - y| = 2030.$$

в целых числах. В ответ впишите сумму $|x| + |y|$ для той пары решений, для которых величина $|x| + |y|$ минимальна.

Ответ: 93

Задача 7

В-1 Сумма первых n членов последовательности $\{a_n\}$ определяется формулой

$$S_n = 3^{n-1} - \frac{1}{3}.$$

На сколько процентов 10-й член этой последовательности больше, чем пятый ?

Ответ: 24200%

Решение. Решение (для первого варианта) По условию $a_1 = S_1 = 3^0 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Также

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 3^{n-1} - 3^{n-2} = 2 \cdot 3^{n-2}.$$

Заметим, что a_1 удовлетворяет последней формуле. Значит, данная последовательность — геометрическая прогрессия со знаменателем $q = 3$ и первым членом $a_1 = \frac{2}{3}$. (Заметим, что тот факт, что это геометрическая прогрессия, здесь несущественен, важно, что найдена формула общего члена). Тогда $a_{10} = 2 \cdot 3^{10-2} = 2 \cdot 3^8$, $a_5 = 2 \cdot 3^3$. Первое число больше второго на

$$\frac{2 \cdot 3^8 - 2 \cdot 3^3}{2 \cdot 3^3} \cdot 100\% = (3^5 - 1) \cdot 100\% = 24200\%$$

В-2 Сумма первых n членов последовательности $\{a_n\}$ определяется формулой

$$S_n = 4^{n-1} - \frac{1}{4}.$$

На сколько процентов 10-й член этой последовательности больше, чем пятый ?

Ответ: 102300%

В-3 Сумма первых n членов последовательности $\{a_n\}$ определяется формулой

$$S_n = 3^{n-1} - \frac{1}{3}.$$

На сколько процентов 10-й член этой последовательности больше, чем четвёртый ?

Ответ: 72800%

В-4 Сумма первых n членов последовательности $\{a_n\}$ определяется формулой

$$S_n = 4^{n-1} - \frac{1}{4}.$$

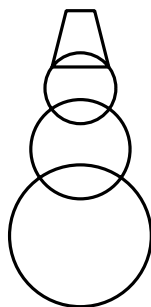
На сколько процентов 10-й член этой последовательности больше, чем шестой ?

Ответ: 25500%

Задача 8

В-1 Вася нарисовал снеговика на новогоднем плакате. Снеговик состоит из трех кругов, центры которых лежат на одной вертикальной прямой. Радиусы кругов (снизу вверх) равны 10, 7 и 5. Круги пересекаются под прямым углом, т. е. их касательные в точках пересечения перпендикулярны. На голове у снеговика ведро вверх дном, нарисованное в виде равнобокой трапеции со сторонами 8, 8, 8 и 4.

Какой высоты получился снеговик? Ответ округлить до десятых.



Ответ: 41.6

Решение. Высота снеговика складывается из пяти слагаемых:

- 1) радиус нижнего круга,
- 2) расстояние между центрами нижнего и среднего кругов,
- 3) расстояние между центрами верхнего и среднего кругов,
- 4) расстояние от центра верхнего круга до нижнего края ведра,
- 5) высота ведра.

Считаем.

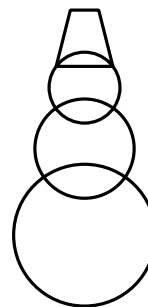
- 1) Радиус нижнего круга равен 10.
- 2) Гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами 10 и 7, т. е. $\sqrt{149}$.
- 3) Гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами 5 и 7, т. е. $\sqrt{74}$.
- 4) Катет треугольника с гипотенузой 5 и другим катетом $8/2$, т. е. $\sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

5) Высота трапеции равна $\sqrt{8^2 - \left(\frac{8-4}{2}\right)^2} = \sqrt{60}$.

Итого, $10 + \sqrt{149} + \sqrt{74} + \sqrt{60} + 3 = 41.55484 \dots \approx 41.6$.

В-2 Вася нарисовал снеговика на новогоднем плакате. Снеговик состоит из трех кругов, центры которых лежат на одной вертикальной прямой. Радиусы кругов (снизу вверх) равны 11, 9 и 6. Круги пересекаются под прямым углом, т. е. их касательные в точках пересечения перпендикулярны. На голове у снеговика ведро вверх дном, нарисованное в виде равнобокой трапеции со сторонами 9, 9, 9 и 5.

Какой высоты получился снеговик? Ответ округлить до десятых.

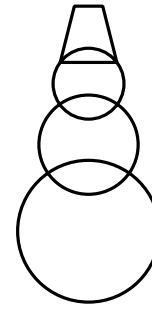


Ответ: 48.8

В-3 Вася нарисовал снеговика на новогоднем плакате. Снеговик состоит из трех кругов, центры которых лежат на одной вертикальной прямой. Радиусы кругов (снизу вверх) равны 10, 8 и 5. Круги пересекаются под прямым углом, т. е. их касательные в точках пересечения перпендикулярны. На голове у снеговика ведро вверх дном, нарисованное в виде равнобоочной трапеции со сторонами 8, 8, 8 и 4.

Какой высоты получился снеговик? Ответ округлить до десятых.

Ответ: 43.0



В-4 Вася нарисовал снеговика на новогоднем плакате. Снеговик состоит из трех кругов, центры которых лежат на одной вертикальной прямой. Радиусы кругов (снизу вверх) равны 11, 8 и 6. Круги пересекаются под прямым углом, т. е. их касательные в точках пересечения перпендикулярны. На голове у снеговика ведро вверх дном, нарисованное в виде равнобоочной трапеции со сторонами 9, 9, 9 и 5.

Какой высоты получился снеговик? Ответ округлить до десятых.

Ответ: 47.3

