
Задача 1

В-1 Числа x, y таковы, что $\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=5$. Найдите $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Ответ: 2.9

Решение. По условию, $\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{(x+y)^2+(x-y)^2}{(x-y)(x+y)}=2\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=5$, поэтому $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\frac{5}{2}+\frac{2}{5}=2.9$.

В-2 Числа x, y таковы, что $\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=10$. Найдите $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Ответ: 5.2

В-3 Числа x, y таковы, что $\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=20$. Найдите $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Ответ: 10.1

В-4 Числа x, y таковы, что $\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=8$. Найдите $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Ответ: 4.25

Задача 2

В-1 Ровно в 8:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B, находящейся на расстоянии 72 км от А, навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 11:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 3 км/ч?

Ответ: 24

Решение. Если рассмотреть движение относительно реки, то второй катер за время прошел с собственной скоростью путь от пункта B до середины C отрезка AB и обратно. Поэтому его скорость равна $72/(11-8)$, причём независимо от скорости течения реки. Например, в первом варианте ответ: 24.

В-2 Ровно в 9:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B, находящейся на расстоянии 69 км от А, навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 12:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 2 км/ч?

Ответ: 23

В-3 Ровно в 7:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B, находящейся на расстоянии 70 км от А, навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 12:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 4 км/ч?

Ответ: 14

В-4 Ровно в 6:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B, находящейся на расстоянии 85 км от А, навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 11:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 3 км/ч?

Ответ: 17

В-5 Ровно в 8:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B, находящейся на расстоянии 52 км от А, навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 10:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 2 км/ч?

Ответ: 26

В-6 Ровно в 9:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B, находящейся на расстоянии 57 км от А, навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 12:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 4 км/ч?

Ответ: 19

В-7 Ровно в 7:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B, находящейся на расстоянии 72 км от А, навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 11:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 3 км/ч?

Ответ: 18

B-8 Ровно в 6:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B, находящейся на расстоянии 64 км от A, навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 10:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 2 км/ч?

Ответ: 16

Задача 3

В-3 Пусть $S(n)$ — сумма цифр натурального числа n. Решите уравнение

$$n + 4S(n) = 2025.$$

Если решений несколько, в ответе укажите наименьшее из них.

Ответ: 1953

Решение. Сначала оценим, сколько знаков должно иметь неизвестное число n. Одно-, двух-, трёхзначное число не смогло бы дать сумму 2025, оно слишком маленькое. Пятизначное и более число, наоборот, слишком большое. Значит, n четырёхзначное, и давайте обозначим его цифры как a, b, c, d.

$$n = \overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d.$$

Тогда $S(n) = a + b + c + d$, а само уравнение примет вид

$$(1000a + 100b + 10c + d) + 4(a + b + c + d) = 2025,$$

$$1004a + 104b + 14c + 5d = 2025.$$

Цифра a может быть 1 или 2, потому что для $a \geq 3$ сумма слева заведомо больше числа справа. Мы хотим найти наименьший вариант, поэтому сначала выбираем 1. (Если такое решение найдется, то случай $a = 2$ можно не рассматривать.) Получим

$$104b + 14c + 5d = 2025 - 1004 = 1021.$$

Прикинем, в каких пределах может находиться b. Наибольшее возможное значение для $14c + 5d$ равно $14 \cdot 9 + 5 \cdot 9 = 171$. Значит, известно, что

$$104b \geqslant 1021 - 171 = 850.$$

Значит, из всех цифр на место b может подойти только 9. Тогда

$$14c + 5d = 1021 - 9 \cdot 104 = 85.$$

В каких пределах может находиться c? Наибольшее возможное значение $5d$ равно $5 \cdot 9 = 45$, то есть $14c \geqslant 85 - 45 = 40$. То есть $c \geqslant 3$, и начнём перебирать варианты по возрастанию, начиная с этого числа. $3 \cdot 14 + 5d = 85$ и $4 \cdot 14 + 5d = 85$ в целых числах не решатся, а вот при $c = 5$ всё сходится: $5 \cdot 14 + 5d = 85$, $d = \frac{85-70}{5} = 3$. Отсюда получается ответ 1953.

В-1 Пусть $S(n)$ — сумма цифр натурального числа n. Решите уравнение

$$n + 3S(n) = 2025.$$

Если решений несколько, в ответе укажите наименьшее из них.

Ответ: 1971

В-2 Пусть $S(n)$ — сумма цифр натурального числа n. Решите уравнение

$$n + 2S(n) = 2025.$$

Если решений несколько, в ответе укажите наименьшее из них.

Ответ: 1977

В-4 Пусть $S(n)$ — сумма цифр натурального числа n. Решите уравнение

$$n + 5S(n) = 2025.$$

Если решений несколько, в ответе укажите наименьшее из них.

Ответ: 1935

Задача 4

В-1 Имеется набор из нескольких подряд идущих натуральных чисел. Известно, что их сумма в 30 раз больше минимального числа в наборе и в 20 раз больше максимального числа в наборе. Сколько чисел в этом наборе?

Ответ: 24

Решение. (для 1 варианта) Пусть n, $n+1$, $\ldots$, $n+k$ — данный набор (всего $k+1$ чисел). Тогда их сумма равна $n(k+1)+\frac{k(k+1)}{2}=30n=20(n+k)$. Значит, $n=2k$, поэтому $\frac{5}{2}k(k+1)=60k$, откуда $k+1=\frac{120}{5}=24$.

В-2 Имеется набор из нескольких подряд идущих натуральных чисел. Известно, что их сумма в 45 раз больше минимального числа в наборе и в 30 раз больше максимального числа в наборе. Сколько чисел в этом наборе?

Ответ: 36

В-3 Имеется набор из нескольких подряд идущих натуральных чисел. Известно, что их сумма в 60 раз больше минимального числа в наборе и в 40 раз больше максимального числа в наборе. Сколько чисел в этом наборе?

Ответ: 48

В-4 Имеется набор из нескольких подряд идущих натуральных чисел. Известно, что их сумма в 75 раз больше минимального числа в наборе и в 50 раз больше максимального числа в наборе. Сколько чисел в этом наборе?

Ответ: 60

Задача 5

B-1 У Нади в аквариуме живут 5 рыбок. Каждый день в обед она насыпает им 30 граммов корма. Каждая рыбка съедает пропорциональное ее весу количество корма, причем к вечеру масса каждой рыбки увеличивается на 0.1% от съеденного. Сегодня утром массы рыбок в граммах были таковы: $(1, 3, 4, 6, 14)$. Какова будет масса самой тяжелой рыбки через 60 дней вечером?

Ответ: 14.9

Решение. Можно считать, что есть всего две рыбки: самая тяжелая и сумма всех остальных. После этого ответ вычисляется просто: $\frac{XKY}{2\cdot 100} + M_N$. (Где X — масса корма в день, K — число дней, Y — процент увеличения массы, M_N — масса самой тяжёлой рыбки).

B-2 У Нади в аквариуме живут 5 рыбок. Каждый день в обед она насыпает им 25 граммов корма. Каждая рыбка съедает пропорциональное ее весу количество корма, причем к вечеру масса каждой рыбки увеличивается на 0.2% от съеденного. Сегодня утром массы рыбок в граммах были таковы: $(2, 3, 3, 7, 15)$. Какова будет масса самой тяжелой рыбки через 62 дней вечером?

Ответ: 16.55

B-3 У Нади в аквариуме живут 6 рыбок. Каждый день в обед она насыпает им 30 граммов корма. Каждая рыбка съедает пропорциональное ее весу количество корма, причем к вечеру масса каждой рыбки увеличивается на 0.1% от съеденного. Сегодня утром массы рыбок в граммах были таковы: $(1, 3, 4, 4, 9, 21)$. Какова будет масса самой тяжелой рыбки через 64 дней вечером?

Ответ: 21.96

B-4 У Нади в аквариуме живут 6 рыбок. Каждый день в обед она насыпает им 25 граммов корма. Каждая рыбка съедает пропорциональное ее весу количество корма, причем к вечеру масса каждой рыбки увеличивается на 0.2% от съеденного. Сегодня утром массы рыбок в граммах были таковы: $(2, 3, 6, 9, 9, 29)$. Какова будет масса самой тяжелой рыбки через 66 дней вечером?

Ответ: 30.65

Задача 6

В-1 Найдите наименьшее возможное значение суммы 10 различных натуральных чисел, если известно, что она нечётна, а произведение любых 5 слагаемых в ней чётно.

Ответ: 65

Решение. Из условия следует, что среди рассматриваемых 10 чисел не более 4 нечётных, а поскольку сумма нечётна, то нечётных чисел либо 1, либо 3. Сумма будет наименьшей, если брать первые подряд идущие чётные и нечётные числа. Если нечётное число одно, то получим $1+2+4+8+\ldots+18=91$, а если нечётных 3, то получим $1+3+5+2+4+6+\ldots+14=65$, это и есть наименьшая возможная сумма.

В-2 Найдите наименьшее возможное значение суммы 12 различных натуральных чисел, если известно, что она нечётна, а произведение любых 5 слагаемых в ней чётно.

Ответ: 99

В-3 Найдите наименьшее возможное значение суммы 11 различных натуральных чисел, если известно, что она нечётна, а произведение любых 5 слагаемых в ней чётно.

Ответ: 81

В-4 Найдите наименьшее возможное значение суммы 14 различных натуральных чисел, если известно, что она нечётна, а произведение любых 7 слагаемых в ней чётно.

Ответ: 115

Задача 7

В-1 В ресторане «Обломов» выпекают 3 вида пирожков: с мясом, с рыбой, с грибами. Повар обратил внимание, что 25 ноября среди тех, кто заказывал по 4 пирожка, не повторился ни один набор пирожков. Какое максимальное количество посетителей «Обломова» могли заказать в этот день по 4 пирожка?

Ответ: 15

Решение. Решение. Задача на число сочетаний с повторениями. Количество выбираемых элементов $r = 4$. Количество видов продукции $n = 3$. То есть, количество «перегородок» $n-1 = 2$.

Воспользуемся формулой $C^r_{r+n-1} = \dfrac{(r+n-1)!}{r! \cdot (n-1)!} = C^4_6 = 15$

В-2 В ресторане «Обломов» выпекают 4 вида пирожков: с мясом, с рыбой, с грибами и с капустой. Повар обратил внимание, что 25 ноября среди тех, кто заказывал по 5 пирожков, не повторился ни один набор пирожков. Какое максимальное количество посетителей «Обломова» могли заказать в этот день по 5 пирожков?

Ответ: 56

В-3 В ресторане «Обломов» выпекают 4 вида пирожков: с мясом, с рыбой, с грибами и с капустой. Повар обратил внимание, что 25 ноября среди тех, кто заказывал по 4 пирожка, не повторился ни один набор пирожков. Какое максимальное количество посетителей «Обломова» могли заказать в этот день по 4 пирожка?

Ответ: 35

В-4 В ресторане «Обломов» выпекают 3 вида пирожков: с мясом, с рыбой, с грибами. Повар обратил внимание, что 25 ноября среди тех, кто заказывал по 5 пирожков, не повторился ни один набор пирожков. Какое максимальное количество посетителей «Обломова» могли заказать в этот день по 5 пирожков?

Ответ: 21

Задача 8

В-1 Найдите наименьшее значение выражения $(a+2)(b+2)(c+2)$, если a, b, c — положительные числа, удовлетворяющие условию $abc = 1$.

Ответ: 27

Решение. По неравенству о средних имеем

$$(a+2)(b+2)(c+2) = (a+1+1)(b+1+1)(c+1+1) \geqslant 3a^{\frac{1}{3}}3b^{\frac{1}{3}}3c^{\frac{1}{3}} = 27(abc)^{\frac{1}{3}},$$

причём равенство достигается при $a = b = c = 1$.

В-2 Найдите наименьшее значение выражения $(a+3)(b+3)(c+3)$, если a, b, c — положительные числа, удовлетворяющие условию $abc = 1$.

Ответ: 64

В-3 Найдите наименьшее значение выражения $(a+4)(b+4)(c+4)$, если a, b, c — положительные числа, удовлетворяющие условию $abc = 8$.

Ответ: 216

В-4 Найдите наименьшее значение выражения $(a+6)(b+6)(c+6)$, если a, b, c — положительные числа, удовлетворяющие условию $abc = 27$.

Ответ: 729
