Задача 1

1. Найдите сумму цифр числа A, если $A = 2^{63} \cdot 4^{25} \cdot 5^{106} - 2^{22} \cdot 4^{44} \cdot 5^{105} - 1$.
Ответ: 959.
Решение. Так как $2^{63} \cdot 4^{25} \cdot 5^{106} = 2^{113} \cdot 5^{106} = 2^7 \cdot 10^{106}$ и $2^{22} \cdot 4^{44} \cdot 5^{105} = 2^{110} \cdot 5^{105} = 2^5 \cdot 10^{105}$, то $A+1 = 2^7 \cdot 10^{106} - 2^5 \cdot 10^{105} = (2^7 \cdot 10 - 2^5) \cdot 10^{105} = 1248 \cdot 10^{105}$. Значит, число A равно $1248 \cdot 10^{105} - 1 = 1247\underbrace{999\ldots999}_{105 \text{ девяток}}$, а его сумма цифр равна $1 + 2 + 4 + 7 + 9 \cdot 105 = 959$.

2. Найдите сумму цифр числа B, если $B = 2^{66} \cdot 4^{23} \cdot 5^{104} - 2^{23} \cdot 4^{43} \cdot 5^{103} - 1$.
Ответ: 947.

3. Найдите сумму цифр числа C, если $C = 2^{70} \cdot 4^{21} \cdot 5^{105} - 2^{32} \cdot 4^{39} \cdot 5^{104} - 1$.
Ответ: 945.

4. Найдите сумму цифр числа D, если $D = 2^{58} \cdot 4^{26} \cdot 5^{102} - 2^{16} \cdot 4^{46} \cdot 5^{101} - 1$.
Ответ: 919.

Задача 2

1. Каждый киндер-сюрприз содержит ровно 3 различных гномика, а всего есть 12 разновидностей гномиков. В коробке лежит достаточно много киндер-сюрпризов, причем в любых двух из них тройки гномиков не одинаковы. Какое наименьшее количество киндер-сюрпризов нужно купить, чтобы после их вскрытия в них заведомо оказалось хотя бы по одному гномику всех 12 разновидностей?
Ответ: 166.
Решение. Из 11 различных гномиков можно составить максимум $C_{11}^3 = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 165$ различных киндеров, поэтому если взять на 1 киндер больше, то среди них не может оказаться менее 12 различных гномиков.

2. Каждый киндер-сюрприз содержит ровно 3 различных лунтика, а всего существует 13 видов лунтиков. В коробке лежит достаточно много киндер-сюрпризов, причем в любых двух из них тройки лунтиков не одинаковы. Какое наименьшее количество киндер-сюрпризов нужно купить, чтобы после их вскрытия в них заведомо оказалось хотя бы по одному лунтику всех 13 видов?
Ответ: 221.

3. Каждый киндер-сюрприз содержит ровно 3 различных фиксика, а всего существует 14 видов фиксиков. В коробке лежит достаточно много киндер-сюрпризов, причем в любых двух из них тройки фиксиков не одинаковы. Какое наименьшее количество киндер-сюрпризов нужно купить, чтобы после их вскрытия в них заведомо оказалось хотя бы по одному фиксику всех 14 видов?
Ответ: 287.

4. Каждый киндер-сюрприз содержит ровно 3 различных смурфика, а всего существует 11 видов смурфиков. В коробке лежит достаточно много киндер-сюрпризов, причем в любых двух из них тройки смурфиков не одинаковы. Какое наименьшее количество киндер-сюрпризов нужно купить, чтобы после их вскрытия в них заведомо оказалось хотя бы по одному смурфику всех 11 видов?
Ответ: 121.

Задача 3

1. Решите неравенство $\operatorname{tg}\arccos x \leqslant \sin \operatorname{arctg} x$.
Ответ: $\left[-\frac{1}{\sqrt[4]{2}};0\right) \cup \left[\frac{1}{\sqrt[4]{2}};1\right]$.
Решение. Поскольку
$$\operatorname{tg}\arccos x = \frac{\sin\arccos x}{\cos\arccos x} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$$
$$\sin\operatorname{arctg} x = \operatorname{tg}\operatorname{arctg} x \cdot \cos\operatorname{arctg} x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$
неравенство принимает вид
$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \leqslant \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{1-x^4}-x^2}{x\sqrt{1+x^2}} \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{1-2x^4}{x(\sqrt{1-x^4}+x^2)} \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\left(x-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)\left(x+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)}{x} \geqslant 0, \\ -1 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$
Применяя метод интервалов, отсюда получаем ответ.

2. Решите неравенство $\operatorname{tg}\arccos x \leqslant \cos\operatorname{arctg} x$.
Ответ: $[-1;0) \cup \left[\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}};1\right]$.

3. Решите неравенство $\operatorname{ctg}\arcsin x > \sin\operatorname{arctg} x$.
Ответ: $\left[-1;-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) \cup \left(0;\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$.

4. Решите неравенство $\operatorname{ctg}\arcsin x + \cos\operatorname{arctg} x > 0$.
Ответ: $\left[-1;-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right) \cup (0;1]$.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Заключительный этап 2019/2020 учебного года для 11 класса

Задача 4

1. Точки A и B лежат на окружности с центром O и радиусом 6, а точка C равноудалена от точек A, B и O. Другая окружность с центром Q и радиусом 8 описана около треугольника ACO. Найдите BQ.
Ответ: 10.
Решение. Так как $AQ = OQ = 8$ и $AC = OC$, треугольники $\triangle ACQ$ и $\triangle OCQ$ равны. Поэтому точки A и O симметричны относительно прямой CQ, так что $AO \perp CQ$.
Далее, $\angle BOQ = \angle BOC + \angle COQ = \angle AOC + \angle OCQ = \pi/2$. Поэтому $BQ = \sqrt{BO^2+OQ^2} = \sqrt{6^2+8^2} = 10$.

2. Хорды AB и BC одной окружности с центром O равны по 12, а центр другой окружности, проходящей через точки B, C и O, удалён от точки A на расстояние 15. Найдите радиус второй окружности.
Ответ: 9.

3. Точки A и B лежат на окружности с центром O и радиусом 6, а точка C равноудалена от точек A, B и O. Найдите радиус окружности, проходящей через точки B, C и O, если её центр удален от точки A на расстояние10.
Ответ: 8.

4. Хорды AB и AC одной окружности с центром O равны между собой, а центр другой окружности радиуса 8, описанной около треугольника ACO, удалён от точки B на расстояние 10. Найдите AC.
Ответ: 6.

Задача 5

1. Найдите все значения a, для каждого из которых при любом x наибольшее из двух чисел $x^3+3x+a-9$ и $a+2^{5-x}-3^{x-1}$ положительно.
Ответ: $a>-5$.
Решение. Первая функция (от x) строго возрастает, а вторая — убывает. Поэтому указанное в задаче требование на параметр a означает, что точка пересечения графиков этих функций лежит выше оси абсцисс, т. е. их значение в корне (угадываемом) уравнения
$$x^3+3x+a-9=a+2^{5-x}-3^{x-1} \;\Leftrightarrow\; x=2$$
положительно, т. е.
$$a+2^3-3^1>0 \;\Leftrightarrow\; a>-5.$$

2. Найдите все значения a, для каждого из которых при любом x наименьшее из двух чисел
$$2^{x-2}-3^{3-x}+a \quad \text{и} \quad a+8-x^3-x$$
отрицательно.
Ответ: $a<2$.

3. Найдите все значения a, для каждого из которых при любом x наибольшее из двух чисел
$$x^3+x+a-7 \quad \text{и} \quad a+2^{4-x}-3^{x-2}$$
положительно.
Ответ: $a>-3$.

4. Найдите все значения a, для каждого из которых при любом x наименьшее из двух чисел
$$2^{x-1}-3^{4-x}+a \quad \text{и} \quad a+5-x^3-2x$$
отрицательно.
Ответ: $a<7$.

24 мая 2020 г.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Заключительный этап 2019/2020 учебного года для 11 класса

Задача 6

1. Автомобили Нива и Тойота едут по кольцевой трассе испытательного полигона, четверть которой проходит по грунтовой дороге, а оставшаяся часть — по асфальтовой. Скорость Нивы на грунтовой дороге равна 80 км/ч, а на асфальтовой — 90 км/ч. Скорость Тойоты на грунтовой дороге равна 40 км/ч, а на асфальтовой — 120 км/ч. Автомобили одновременно стартуют в начале грунтовой части трассы и сначала едут по этой грунтовой части. На каком по счёту круге один из автомобилей впервые обгонит другой?
Ответ: Нива на своём 11-м круге обгонит Тойоту на её 10-м круге.
Решение. Пусть S км — длина грунтовой части трассы, тогда $3S$ км — длина асфальтовой части. Нива проезжает один круг за $\frac{S}{80}+\frac{3S}{90}=\frac{11S}{240}$ ч, а Тойота — за $\frac{S}{40}+\frac{3S}{120}=\frac{12S}{240}>\frac{11S}{240}$ ч. Поскольку автомобили начинают движение по грунтовой дороге, где скорость Нивы выше, Нива изначально выйдёт вперёд и впоследствии совершит обгон, причём обгон может произойти только на грунтовой дороге, где скорость Нивы выше.

Пусть к моменту первого обгона Тойоты Нивой Тойота проедет n целых кругов и ещё расстояние $S\cdot x$, где $0<x<1$ (если $x=1$, обгона не произойдёт: автомобили поравняются, но после выезда на асфальтовую дорогу Тойота поедет быстрее Нивы). Тогда к моменту обгона время Тойоты в пути будет равно $\frac{12S}{240}\cdot n+\frac{S\cdot x}{40}$, а время Нивы будет равно $\frac{11S}{240}\cdot(n+1)+\frac{S\cdot x}{80}$. Поскольку автомобили стартуют одновременно, получаем уравнение $\frac{12S}{240}\cdot n+\frac{S\cdot x}{40}=\frac{11S}{240}\cdot(n+1)+\frac{S\cdot x}{80}$, откуда $12n+6x=11n+11+3x$, или $n+3x=11$. Поскольку $0<x<1$, отсюда следует, что $n=9$ или $n=10$. Значит, к моменту первого обгона Тойота проедет 9 полных кругов и перейдёт на 10-й, а Нива проедет 10 полных кругов и перейдет на 11-й.

2. Мотоцикл и квадроцикл едут по кольцевой дороге, четверть которой проходит по лесу, а оставшаяся часть — по полю. Скорость мотоцикла при движении по лесу равна 20 км/ч, а при движении по полю — 60 км/ч. Скорость квадроцикла при движении по лесу равна 40 км/ч, а при движении по полю — 45 км/ч. Квадроцикл и мотоцикл одновременно въезжают в лес. Какое из транспортных средств первым обгонит другое, и на каком по счёту круге это произойдёт?

Ответ: Квадроцикл на своём 11-м круге обгонит мотоцикл на его 10-м круге.

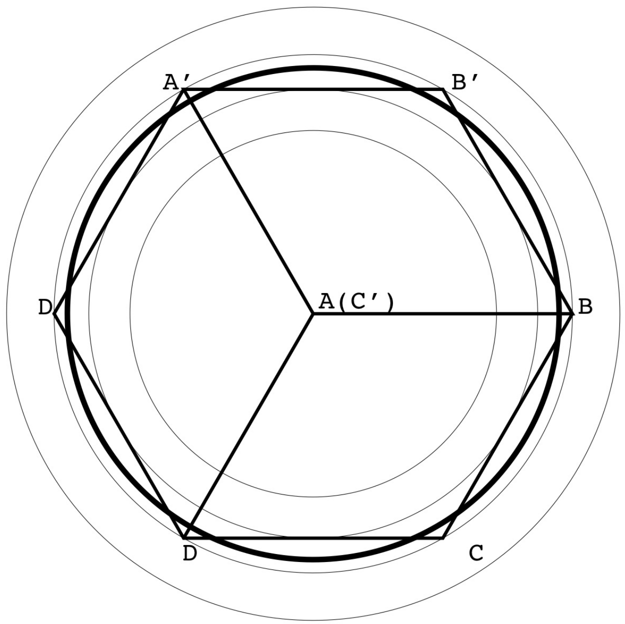
3. Саша едет на самокате, а Галя — на гироскутере. В горку Саша едет на самокате со скоростью 8 км/ч, а под горку — со скоростью 24 км/ч. Галя на гироскутере едет в горку со скоростью 16 км/ч, а под горку — со скоростью 18 км/ч. Саша и Галя соревнуются на кольцевом треке, четверть которого составляет подъём, а остальную часть — спуск. Они одновременно трогаются вверх в начале подъёма. Кто из них первым обгонит другого, и на каком по счёту круге это произойдёт?
Ответ: Галя на своём 11-м круге обгонит Сашу на его 10-м круге.

4. Снегоход и квадроцикл соревнуются на зимней кольцевой трассе, четверть которой покрыта рыхлым снегом, а остальная часть — плотным снегом. Снегоход едет по рыхлому снегу со скоростью 32 км/ч, а по плотному — со скоростью 36 км/ч. Квадроцикл едет по рыхлому снегу со скоростью 16 км/ч, а по плотному — со скоростью 48 км/ч. Снегоход и квадроцикл начинают движение одновременно в начале части трассы, покрытой рыхлым снегом, и сначала едут по этой части. Какое из транспортных средств первым обгонит другое, и на каком по счёту круге это произойдёт?
Ответ: Снегоход на своём 11-м круге обгонит квадроцикл на его 10-м круге.

Задача 7

1. Куб с ребром $a = \sqrt{2+\sqrt{3}}$ освещается цилиндрическим лучом света радиуса $\rho = \sqrt{2}$, направленным вдоль главной диагонали куба. Найдите площадь освещенной части поверхности куба.
Ответ: $\sqrt{3}\,(\pi + 3)$.

Решение. Используя скалярное произведение, легко показать, что косинус угла между главной диагональю (осью луча) и любым ребром куба равен $1/\sqrt{3}$. Такое же значение имеет косинус угла между осью луча и нормалью к любой грани куба.



Изобразим проекцию куба на плоскость, перпендикулярную оси луча. Площадь проекции на эту плоскость любой плоской фигуры, расположенной на какой либо грани куба, равна площади самой фигуры, умноженной на косинус угла между гранью и плоскостью проекции, т. е. на $1/\sqrt{3}$. Поэтому, вычислив площадь проекции освещенного участка куба и умножив ее на $\sqrt{3}$, мы получим требуемый ответ.

Длина проекции любого ребра равна произведению длины ребра a на косинус угла между ребром и плоскостью проекции или на синус угла между ребром и осью луча, т. е. $a\sqrt{2/3}$.

В случае, когда радиус луча ρ не превышает радиуса r вписанного в изображенный правильный шестиугольник окружности, проекция освещенного участка имеет площадь, равную $\pi\rho^2$. Радиус вписанной в шестиугольник окружности равен $r = a\sqrt{2/3}\cdot\sqrt{3}/2 = a/\sqrt{2}$. Таким образом, при $\rho \leqslant a/\sqrt{2}$ площадь освещенного участка равна $\pi\rho^2\sqrt{3}$.

Если радиус ρ больше или равен радиусу R описанной около шестиугольника окружности, то полностью освещены три грани куба, т. е. при $\rho \geqslant R = a\sqrt{2/3}$ площадь освещенного участка равна $3a^2$.

Рассмотрим случай $a/\sqrt{2} < \rho < a\sqrt{2/3}$. Площадь проекции освещенного участка получается вычитанием из $\pi\rho^2$ шести площадей сегментов, вылезающих за шестиугольник. Площадь каждого такого сегмента равна разности площадей соответствующих сектора и треугольника. Угол сектора равен $2\arccos a/\rho\sqrt{2}$. Поэтому площадь сегмента равна

$$\rho^2 \arccos\frac{a}{\rho\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{\rho^2 - \frac{a^2}{2}}\cdot\frac{a}{\sqrt{2}} = \rho^2\left(\arccos q - q\sqrt{1-q^2}\right),$$

где $q = a/\rho\sqrt{2} \in \left(\sqrt{3}/2; 1\right)$, а площадь освещенного участка равна

$$S = \rho^2\sqrt{3}\left(\pi - 6\arccos q + 6q\sqrt{1-q^2}\right).$$

Отметим, что соотношение $q = a/\rho\sqrt{2} \in \left(\sqrt{3}/2; 1\right)$ равносильно неравенству $a/\sqrt{2} < \rho < a\sqrt{2/3}$, определяющему 3-й рассматриваемый случай.

По условию имеем имеем

$$q = \frac{a}{\rho\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2\cdot 2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \cos\frac{\pi}{12} \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right),$$

$$q\sqrt{1-q^2} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}\cdot\sqrt{1 - \frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{4},$$

$$S = 2\sqrt{3}\left(\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{6}{4}\right) = \sqrt{3}\,(\pi + 3).$$

2. Куб с ребром $a = 1/\sqrt{2}$ освещается цилиндрическим лучом света радиуса $\rho = \sqrt{2-\sqrt{3}}$, направленным вдоль главной диагонали куба. Найдите площадь освещенной части поверхности куба.

   Ответ: $\left(\sqrt{3} - \dfrac{3}{2}\right)(\pi + 3)$.

3. Куб с ребром $a = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ освещается цилиндрическим лучом света радиуса $\rho = \sqrt{2}$, направленным вдоль главной диагонали куба. Найдите площадь освещенной части поверхности куба.

   Ответ: $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{2} + 3\sqrt{6}$.

4. Куб с ребром $a = 1$ освещается цилиндрическим лучом света радиуса $\rho = \sqrt{2-\sqrt{2}}$, направленным вдоль главной диагонали куба. Найдите площадь освещенной части поверхности куба.

   Ответ: $\dfrac{\left(2\sqrt{3} - \sqrt{6}\right)\left(\pi + 6\sqrt{2}\right)}{4}$.

24 мая 2020 г.

Задача 8

1. Известно, что m, n, k — различные натуральные числа, большие 1, число $\log_m n$ рационально, и, кроме того,
$$k^{\sqrt{\log_m n}} = m^{\sqrt{\log_n k}}.$$
Найдите минимальное из возможных значений суммы $k + 5m + n$.
Ответ: 278.
Решение. Преобразуем исходное равенство, учитывая, что числа m, n, k больше 1 и соответствующие логарифмы положительны:
$$k^{\sqrt{\log_m n}} = m^{\sqrt{\log_n k}} \Leftrightarrow \log_m k \cdot \sqrt{\log_m n} = \sqrt{\log_n k} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_m k \cdot \sqrt{\log_m n} = \sqrt{\frac{\log_m k}{\log_m n}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{\log_m k} \cdot \log_m n = 1 \Leftrightarrow \log_m k \cdot \log_m^2 n = 1.$$
Выполнив замену $k = n^p$, $m = n^q$, где $p \neq 0$, $q \neq 0$, получим
$$\frac{p}{q} \cdot \frac{1}{q^2} = 1 \Leftrightarrow p = q^3.$$
Таким образом, все тройки (k, m, n), удовлетворяющие условию задачи, имеют вид $\left(n^{q^3}, n^q, n\right)$.
Ясно, что $q > 0$: в противном случае из натуральности числа n следует, что число n^q лежит в интервале $(0; 1)$ и не является натуральным. Случай $q = 1$ противоречит условию задачи. Если $q \in (0; 1)$, то $q = 1/r$, где $r > 1$, и тогда тройку натуральных чисел $\left(n^{q^3}, n^q, n\right)$ можно записать в виде $\left(l, l^{r^2}, l^{r^3}\right)$ с натуральным l. Сумма $k+5m+n$ для этой тройки будет больше такой же суммы для чисел, входящих в тройку $\left(l^{r^3}, l^r, l\right)$. Значит, $q > 1$.
При целых q тройка чисел с минимальной суммой $k + 5m + n$ получается при $n = 2$, $q = 2$: это числа $k = 2^8$, $m = 2^2$, $n = 2$, и для них сумма $k+5m+n$ равна 278. Если q рациональное, но не целое, то для того, чтобы число n^{q^3} было целым, необходимо, чтобы n было как минимум восьмой степенью целого числа, не меньшего 2, и, конечно же, сумма $n^{q^3} + 5n^q + n$ будет больше, чем 278 (т.к. $n \geqslant 256$).

2. Известно, что m, n, k — различные натуральные числа, большие 1, число $\log_m n$ рационально, и, кроме того,
$$k^{\sqrt{\log_m n}} = m^{\sqrt{\log_n k}}.$$
Найдите минимальное из возможных значений суммы $2k + m + 2n$.
Ответ: 520.

3. Известно, что m, n, k — различные натуральные числа, большие 1, число $\log_m n$ рационально, и, кроме того,
$$k^{\sqrt{\log_m n}} = m^{\sqrt{\log_n k}}.$$
Найдите минимальное из возможных значений суммы $k + 3m + n$.
Ответ: 270.

4. Известно, что m, n, k — различные натуральные числа, большие 1, число $\log_m n$ рационально, и, кроме того,
$$k^{\sqrt{\log_m n}} = m^{\sqrt{\log_n k}}.$$
Найдите минимальное из возможных значений суммы $3k + m + 3n$.
Ответ: 778.

24 мая 2020 г.