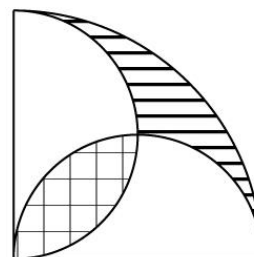


ЗАДАНИЯ ОЧНОГО ТУРА ОЛИМПИАДЫ «ЛОМОНОСОВ» ПО РОБОТОТЕХНИКЕ 2017/18 С РЕШЕНИЯМИ

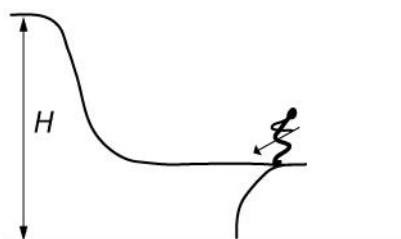
10—11 классы

1. На радиусах четверти круга, как на диаметрах, построены полукруги (смотри рисунок). Что имеет большую площадь: общая (в клетку) часть этих полукругов или часть четверти круга, не покрытая ими (в линейку)?



Решение. Эти части равны по площади.

2. FEDOR (Final Experimental Demonstration Object Research) — антропоморфный робот-спасатель. Мощность робота составляет 20 лошадиных сил (13,5 кВт). Рост — 180 см, вес — до 160 кг. Его



научили кататься на лыжах и спускаться по трамплину. FEDOR съезжает с горы высотой H , оканчивающейся горизонтальным трамплином. При какой высоте трамплина FEDOR пролетит наибольшее расстояние по горизонтали и каково это расстояние? Трением лыж о поверхность горы и сопротивлением воздуха можно пренебречь.

Решение. По закону сохранения энергии

$$mgH = mgh + \frac{mv_0^2}{2}.$$

Где v_0 — скорость робота на трамплине. Расстояние полета по горизонтали будет равно

$$S = 2\sqrt{hH - h^2}.$$

И условия максимума для расстояния как функции от высоты трамплина получим, что $h=H/2$.

3. Марс — четвёртая по удалённости от Солнца и седьмая по размерам планета Солнечной системы. Масса Марса составляет 0,107 массы Земли, объём — 0,151 объёма Земли, а средний линейный диаметр — 0,53 диаметра Земли. Названа в честь Марса — древнеримского бога войны, соответствующего древнегреческому Аресу. Иногда Марс называют «красной планетой» из-за красноватого оттенка поверхности, придаваемого ей минералом маггемитом — γ -оксидом железа(III). Минимальное расстояние от Марса до Земли составляет 55,76 млн. км (когда Земля находится точно между Солнцем и Марсом), максимальное — 401 млн. км (когда Солнце находится точно между Землёй и Марсом).

Марсоход Curiosity, обнаружив интересный образец марсианской породы, посылает на Землю запрос и ждёт команды от оператора, который находится на Земле, брать образец для анализа или нет. Сколько минут должен ждать Curiosity рядом с образцом грунта?

Решение. Радиосигнал распространяется в космосе со скоростью света $3 \cdot 10^5$ км/с. Размерами планет можно пренебречь по сравнению с расстояниями между ними. При максимальном удалении сигнал в одну сторону будет идти $401 \cdot 10^6 / 3 \cdot 10^5 \text{ с} \approx 1340 \text{ с} \approx 22,3 \text{ мин}$. Значит ждать нужно 44,6 мин. При минимальном удалении сигнал в одну сторону будет идти $55,76 \cdot 10^6 / 3 \cdot 10^5 \text{ с} \approx 185,9 \text{ с} \approx 3,1 \text{ мин}$. Значит ждать нужно 6,2 мин.

4. Вертикальные колебания груза массы m на пружине жесткости k в вязкой среде с учетом силы тяжести описываются уравнением

$$x(t) = ae^{-pt} + (2a - 2)e^{-qt} + \frac{mg}{k},$$

где $x(t)$ – отклонение пружины от состояния равновесия, a – параметр, зависящий от начальных условий, а p, q – положительные параметры, зависящие от массы груза, жесткости пружины и вязкости среды. В состоянии равновесия величина $x(t) = \frac{mg}{k}$ постоянна. Груз вывели из состояния равновесия. Для величин $p = 2, q = 1, \frac{mg}{k} = 1$ найдите значения параметра a , при котором в процессе движения пружина дважды окажется в нерастянутом состоянии.

Решение.

Решение: заменой $e^{-t} = y$ задача сводится к следующей: найти значения параметра a ,

при каждом из которых уравнение $ay^2 + 2(a-1)y + 1 = 0$ имеет два положительных корня.

Условия этого $y_1 y_2 = 1/a > 0, y_1 + y_2 = (1-a)/a > 0, D = 4a^2 - 12a + 4 > 0$. Получаем систему

$$a > 0, a < 1, a \in \left(-\infty; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right), \text{ откуда } a \in \left(0; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right).$$

5. Тонкое высокое дерево спилено под корень и падает. Куда прогибается ствол дерева во время падения: выпуклостью вниз или вверх? Можно считать, что ствол дерева сразу перепилен полностью и сопротивление воздуха отсутствует.

Решение. Ствол будет прогибаться вниз. Можно рассмотреть модель в виде перевернутых маятников с разной длиной. Чем больше длина, тем больше период и на меньший угол повернется маятник за одно и то же время.